THÈSE DE DOCTORAT DE MATHÉMATIQUES

DE L'UNIVERSITÉ JOSEPH FOURIER (GRENOBLE I)

préparée à l'Institut Fourier

Laboratoire de mathématiques
UMR 5582 CNRS-UJF

SPECTRES ASYMPTOTIQUES DES NILVARIÉTÉS GRADUÉES

Constantin VERNICOS

Soutenue à Grenoble le 20 Décembre 2001 devant le jury :

Gérard BESSON (CNRS, Université Grenoble I) ; Directeur,

Yves COLIN DE VERDIÈRE (Université Grenoble I) ; Président,

Gilles COURTOIS (CNRS, École Polytechnique),

Pierre PANSU (Université Paris Sud),

Raoul ROBERT (CNRS, Université Grenoble I).

Au vu des rapports de Pierre PANSU et Toshikazu SUNADA (Université de Tohoku, Japon).

Foreword by the Author's Mother

I just wanted to tell you that this book was written by my son who is a very capable young man. I haven't actually read what he has to say here but I'm sure it's very pleasant if he wrote it. You'd think that it wouldn't be such a hardship on a young man who writes so nicely to write an occasional letter to his mother who loves him, but it seems there are more important things to a young man these days than his mother. All right, never mind. I only hope you will like the book and I pray that the whole experience has taught him something.

Par la mère de Dan Greenburg dans
How to be a Jewish Mother

Remerciements

Pendant ces trois dernières années (si on oublie une année de chasse alpine), Gérard Besson à toujours été là pour écouter mes balbutiements, mes doutes et enfin mes joies mathématiques. Ses conseils et sa bonne humeur m'ont étés d'une aide précieuse. Merci Gérard.

Pierre Pansu a accepté de rapporter sur ma thèse et, par l'intermédiaire de ses travaux m'a initié aux secrets des groupes de Heisenberg. Qu'il en soit ici remercié.

Toshikazu Sunada sensee m'a fait un grand honneur en acceptant d'être l'un de mes rapporteurs « Domo arigato gozaimasu ».

Je dois à Yves Colin de Verdière la découverte de la Γ-convergence, je l'en remercie, ainsi que pour sa participation au jury.

Je remercie Raoul Robert d'avoir accepté de faire parti du jury.

Après m'avoir acceuilli au centre de mathématiques un été pour mon premier stage en géométrie riemannienne, Gilles Courtois me fait grand plaisir en faisant lui aussi parti du jury.

Je dois à Sylvain Gallot mon initiation à la géométrie riemannienne, à défaut de m'avoir triplement vacciné avec l'aide de ses comparses, il m'a triplement transmis le virus !

Je voudrais aussi remercier tout le personnel de l'Institut Fourier sans qui nous serions perdus, en particulier Arlette Guttin-Lombard.

Une partie de cette thèse à été rédigée pendant mon séjour au Japon à l'université de Nagoya. Je tiens à remercier mon hôte Masahiko Kanai pour son accueil et ses suggestions ainsi que Shin Nayatani pour ses conseils tant mathématiques que touristiques et enfin l'alter ego d'Arlette, Kazuko Kozaki qui s'est occupé de tous les problèmes pratiques (logement...).

Enfin, je les imagine impatients, je tiens à remercier tous les (ex-)apprentis matheux, bille en tête Stéphane Pin, qui à toujours eu une oreille attentive et une patience rare pour écouter mes questions mathématiques, Grégoire Charlot pour nos discussions sur la géométrie sous-riemannienne, Bertrand « Abou» Deroin pour sa curiosité et ses critiques constructives, sans oublier tous ceux et celles avec qui j'ai partagé un moment de mathématique autour d'un café et dont la liste est si longue qu'elle s'étends sur deux continents, trois étages de l'Institut Fourier (et un rez de chaussé maintenant !), un étage de l'ENS-lyon et deux lycées parisiens.

Merci à D. Knuth, sans qui cette thèse ne serait pas ce qu'elle est !

Table des matières

Introduction

Imaginons un damier infini dont les cases seraient alternativement jaunes et bleues. En nous éloignant de ce dernier que va-t'il se produire ? Les cases vont nous paraître de plus en plus petites jusqu'à ce que l'on ne puisse plus les distinguer. À ce moment là, on ne verra plus qu'une surface uniformément verte. Cet exemple naÍf illustre parfaitement ce qu'est l'homogénéisation : l'étude de matériaux microscopiquement hétérogènes et de structure périodique (ex. les cristaux), dont le comportement macroscopique est celui d'un matériau homogène. Le problème étant de déterminer les caractéristiques du matériau homogène. C'est l'idée sous-jacente à cette thèse dont l'objet est l'étude macroscopique du revêtement universel des nilvariétés graduées. Ce travail trouve ses racines dans deux résultats :

Le premier concerne les tores riemanniens et on le doit à D. Burago et S. Ivanov :

Théorème 1 ([BI95]).
Soient $(\mathbb{T}^n, g)$ un tore riemannien, $\mathrm{Vol}\big(B_g(\rho)\big)$ le volume des boules géodésiques $B_g(\rho)$ de rayon ρ, centrées en un point fixe, induits sur le revêtement universel, alors

- $\displaystyle\lim_{\rho\to+\infty} \frac{\mathrm{Vol}\big(B_g(\rho)\big)}{\rho^n} = \mathrm{Volas}(g) \geq b_n,$
- *en cas d'égalité le tore est plat.*

Où b_n est le volume euclidien de la boule euclidienne unitaire.

Le second concerne les variétés hyperboliques et on le doit à G. Besson, G. Courtois et S. Gallot :

Théorème 2 ([BCG95]).
Soit X une variété compacte admettant une métrique g_0 dont la courbure est partout égale à -1, alors pour tout autre métrique g :

$$\mathrm{Ent}(X, g)^n \,\mathrm{Vol}(X, g) \geq \mathrm{Ent}(X, g_0)^n \,\mathrm{Vol}(X, g_0) = (n-1)^n \,\mathrm{Vol}(X, g_0)$$

en cas d'égalité g est isométrique à g_0.

Du point de vue des groupes fondamentaux, que l'on placerait sur un segment en fonction de leur croissance, ces deux résultats se trouveraient à chaque extrémités. L'un concerne les groupes $\mathbb{Z}^n$, le second des groupes à croissance exponentielle. Ainsi il devient naturel de se demander s'il existe un résultat similaire pour les situations intermédiaires. Outre les tores, suivant M. Gromov [Gro81], les autres groupes à croissance polynomiale sont ceux possédant un sous-groupe nilpotent d'indice fini. Ce sont justement les groupes nilpotents qui sont au coeur de notre étude. Bien que les deux théorèmes pré-cités concernent le volume des boules de grands rayon, nous avons choisi un autre point de vue : nous nous sommes concentrés sur le spectre du laplacien de ces boules, en effet celui-ci contient en son sein d'autres informations, notamment le volume.

$\mathbb{III}$ — Après les tores, les variétés nilpotentes les plus simples sont les groupes de Heisenberg, ils font l'objet du chapitre $\mathbb{IV}$. Le volume asymptotique riemannien des groupes de Heisenberg s'avère non borné lorsqu'on fait varier la métrique, de sorte qu'obtenir un résultat similaire à celui de D. Burago et S. Ivanov semble un échec. Cependant en se plaçant dans le cadre de la géométrie sous-riemannienne certaines obstructions disparaissent : c'est donc tout naturellement que l'on se place dans le cadre de la géométrie sous-riemannienne au chapitre $\mathbb{III}$ pour étudier les variétés nilpotentes, i.e., des variétés obtenues en quotientant un groupe de Lie unipotent par un sous-groupe co-compact.

Toutefois, dans ce cadre, il n'existe pas de forme volume canonique, comme dans le cas riemannien, et pas de laplacien canonique. Le seul cas où ces objets peuvent être définis de manières naturelle, est le cas où l'on munit la variété nilpotente d'une métrique invariante à gauche par le groupe de Lie. Dans ce cas on définit usuellement un laplacien — dit laplacien de Kohn — en prenant une base orthonormée de champs (horizontaux) invariants à gauche pour la métrique sous-riemannienne. On commence donc par définir un laplacien sous-riemannien qui coíncide avec le laplacien de Kohn dans le cas invariant à gauche.

En nous inspirant des travaux de P. Pansu, dans [Pan82], concernant le volume des grandes boules, nous étudions la norme stable dans ce cadre et montrons comment celle-ci nous permet d'étudier le comportement asymptotique des boules de grands rayon sur le revêtement universel : du point de vue de la topologie de Gromov-Haussdorff et du point de vue du volume. Ce travail étant un préliminaire indispensable à l'étude du spectre de ces mêmes boules de grand rayon. En effet le résultat principal de ce chapitre est :

Théorème $\mathbb{II}$.19.
Soit $M^n = \Gamma\backslash G$ une nilvariété graduée, munie d'une métrique sous-riemannienne g quelconque sur la distribution issue du premier espace de la graduation. Notons d_g la distance sous-riemannienne, $B_g(\rho)$ les boules centrées en l'identité, de rayon ρ, induites sur le revêtement universel et $\lambda_i\big(B_g(\rho)\big)$ la $i^{\text{ème}}$ valeur propre du laplacien sous-riemannien pour le problème de Dirichlet sur $B_g(\rho)$.
Alors il existe un opérateur hypoelliptique Δ_∞, le laplacien de Kohn associé à une métrique sous-riemannienne invariante à gauche sur G, tel qu'en notant λ_i^∞ sa $i^{\text{ème}}$ valeur propre pour le problème de Dirichlet sur la boule unité de la distance d_∞ issue de la norme stable on ait :

$$\lim_{\rho\to\infty} \rho^2 \lambda_i\big(B_g(\rho)\big) = \lambda_i^\infty$$

On obtient également l'équivalent riemannien de ce théorème (voir $\mathbb{II}$.32). La démonstration de ce théorème utilise la théorie de l'homogénéisation sous une forme peu usuelle. Les outils nécessaire à la démonstration sont introduits dans la partie $\mathbb{II}$.II et utilisés dans la partie $\mathbb{II}$.III. Soulignons que si l'homogénéisation est un outils classique de l'analyse numérique pour des opérateurs périodiques, i.e. invariant par l'action de $\mathbb{Z}^n$ par translation, elle l'est moins dans le cadre de l'action d'un sous-groupe co-compact d'un groupe de Lie nilpotent. Les seuls travaux allant dans ce sens étant ceux de M. Biroli, U. Mosco, C. Picard et N. Tchou (cf. [BMT96], [BMT97] et [BPT98]) et uniquement dans le cadre des groupes de Heisenberg. Notre travail en est, en quelque sorte, une généralisation. Enfin notons que dans le cadre riemannien, l'étude asymptotique du spectre fait apparaître la métrique du tore d'Albanese et donne une inégalité sur le volume asymptotique :

Théorème 3.
Soit (M, g) un groupe de Lie nilpotent muni d'une métrique riemannienne relevée d'une métrique riemannienne d'un quotient co-compact. Alors son volume asymptotique riemannien vérifie :

$$\mathrm{Volas}(g) \geq \frac{\mu_g(D_f)}{\mu_2(D_f)} \mu_2\big(B_2(1)\big)$$

où μ_g est la mesure riemannienne associée a g, μ_2 une mesure sous-riemannienne associée à une métrique sous-riemannienne invariante à gauche, issue du tore d'Albanese de M, dont $B_2(1)$ est la boule géodésique de rayon 1 et D_f un domaine fondamental pour l'action co-compacte

$\mathbb{III}$ — Au chapitre $\mathbb{III}$ nous nous concentrons sur les tores. En effet notre première question concernait l'asymptotique de la première valeur propre pour le problème de Dirichlet sur le revêtement universel des tores, dans le but savoir si celle-ci vérifie un résultat similaire au théorème 1 de D. Burago et S. Ivanov. C'est l'objet du chapitre $\mathbb{III}$ que de démontrer que tel est le cas. Plus précisément, nous y donnons une nouvelle expression de la norme stable utilisant la théorie de l'homogénéisation (en particulier on redémontre comment l'obtenir à partir de la distance déduite de la métrique du tore relevée sur son revêtement universel, théorème $\mathbb{III}.1$ et corollaire $\mathbb{III}.1$.bis). Nous montrons précisément comment la norme plate du tore d'Albanese apparaît lorque nous homogénéisons le laplacien. Après avoir fait le lien avec la Γ-convergence en $\mathbb{III}$.II nous montrons enfin le théorème principal de cette partie :

Théorème $\mathbb{III}$.21.
Soient $(\mathbb{T}^n, g)$ un tore de dimension n, $B_g(\rho)$ la boule géodésique de rayon ρ induite sur son revêtement universel, centrée en un point fixé, et $\lambda_1\big(B_g(\rho)\big)$ la première valeur propre du laplacien pour le problème de Dirichlet sur $B_g(\rho)$ alors

1. $\lim_{\rho\to\infty} \rho^2 \lambda_1\big(B_g(\rho)\big) = \lambda_\infty \leq \lambda_{e,n}$
2. *En cas d'égalité la métrique g est plate.*

où λ_∞ est la première valeur propre d'un opérateur elliptique sur la boule unité de la norme stable et $\lambda_{e,n}$ la première valeur propre du laplacien euclidien, sur la boule euclidienne.

et modulo l'utilisation de l'inégalité de Faber-Krahn, que nous redémontrons dans un cadre un peu plus général, celui des espaces de Minkowski (lemme $\mathbb{III}$.24), ce théorème nous permet de préciser le résultat du théorème 3 sur le volume asymptotique faisant intervenir le volume du tore d'Albanese, en montrant que le cas d'égalité caractérise les tores plats (voir proposition $\mathbb{III}$.25) et en redémontrant, dans le cas de la dimension 2, l'inégalité du théorème 1 de D. Burago et S. Ivanov.

Théorème $\mathbb{III}$.25.
Soit $(\mathbb{T}^n, g)$ un tore de dimension n, $B_g(\rho)$ les boules géodésiques de rayon ρ centrées en un point fixe, induites sur son revêtement universel et $\mathrm{Vol}_g\big(B_g(\rho)\big)$ leur volume riemannien. Si on pose

$$\mathrm{Volas}(g) = \lim_{\rho\to\infty} \frac{\mathrm{Vol}_g\big(B_g(\rho)\big)}{\rho^n}$$

alors,
- $\mathrm{Volas}(g) \geq \dfrac{\mathrm{Vol}_g(\mathbb{T}^n)}{\mathrm{Vol}_{Al}(\mathbb{T}^n)} b_n$
- *en cas d'égalité le tore est plat.*

où b_n est le volume euclidien de la boule euclidienne unitaire.

Corollaire $\mathbb{III}$.25.bis
Pour $n = 2$ on obtient
- $\mathrm{Volas}(g) \geq b_2$
- *en cas d'égalité le tore est plat.*

De plus, nous expliquons, dans la partie $\mathbb{III}$.III.3, pourquoi cette inégalité ne permet pas d'obtenir ce même résultat pour les dimensions supérieures.

$\mathbb{IV}$ — Enfin au chapitre $\mathbb{IV}$ nous étudions en détail les groupes de Heisenberg. Notamment dans le cadre sous-riemannien, nous construisons de manière canononique une forme volume pour le premier d'entre eux (cf. lemme $\mathbb{IV}.18$). Nous en profitons pour introduire une forme volume qui nous semble canonique pour les autres (ou du moins qui semble être un bon candidat). Dans ce chapitre nous regroupons aussi les résultats relatifs aux métriques invariantes à gauche riemanniennes et sous-riemanniennes, leurs sous-groupes co-compact et les différences par rapport aux cas des tores qui nous empêchent, pour l'instant, d'obtenir un résultat similaire au théorème $\mathbb{III}.21$ dans ce cadre.

L'intérêt de ces résultats étant double : d'une part ils confirment la conviction qu'un résultat similaire à celui du tore devrait exister pour les nilvariétés graduées, permettant de caractériser les métriques invariantes à gauche par leur volume asymptotique ou par leur spectre asymptotique ; d'autre part les méthodes utilisées, celles de l'homogénéisation et de la Γ-convergence qui s'avèrent adaptées à l'étude macroscopique des nilvariétés. La Γ-convergence est succintement décrite au chapitre $\mathbb{I}$.

Numérotation Les lemmes, propositions... sont numérotés ensemble et les équations indépendamment. Ainsi $\mathbb{IV}.18$ se réfère au lemme $\mathbb{IV}.18$ du quatrième chapitre, tandis que $\mathbb{III}$-13 à l'équation correspondante du troisième chapitre.

Premier chapitre

Préliminaires topologiques et analytiques

Introduction

L'un des principaux problèmes en calcul des variations est de déterminer la borne inférieure d'une fonctionnelle et le cas échéant ses minima. L'une des méthodes pour y parvenir est d'utiliser les équations d'Euler-Lagrange. Ce sont celles-là même que l'on utilise pour la recherche des géodésiques d'une variété. Maintenant, si l'on étudie une suite de fonctionnelles, dont on connaît pour chaque élément le minimum et le point où celui-ci est atteint, on est naturellement amené à se demander comment cela se comporte par passage à la limite. Un cas simple est celui où la suite de fonctionnelles converge uniformément sur l'espace étudié. Dans ce cas la suite des bornes inférieures converge vers la borne inférieure de la fonctionnelle limite (en fait la convergence uniforme induit l'existence d'une borne inférieure). En revanche dans le cas de la convergence simple tout peut arriver, et comme l'exemple de la suite de fonctions le montre :

$$F_j(x) = \begin{cases} 0 & x \leq j; \\ -1 & x > j. \end{cases}$$

la suite des bornes inférieures ne converge pas forcément vers la borne inférieure de la fonction limite.

D'où le désir d'une convergence sur les fonctionnelles, plus faible que la convergence forte bien trop restrictive, dont le comportement vis-à-vis du passage à la borne inférieure serait agréable, i.e., dont on pourrait intervertir aisément le passage à la borne inférieure et le passage à la limite. C'est là l'un des principaux avantages de la Γ-convergence, elle en possède d'autres, dont celui de conserver les formes quadratiques lors du passage à la limite (important en ce qui concerne notre problématique).

I Brève initiation à la Γ-convergence

Dans tout ce qui suit nous noterons X un espace topologique et $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages ouverts d'un point $x \in X$

I.1 Définition de la Γ-convergence

I.1.a Fonctions semi-continues inférieurement

Les fonctions semi-continues inférieurement jouant un rôle particulier pour la Γ-convergence, nous réunissons quelques résultats les concernant.

Nous rappelons qu'une fonction F sur un espace topologique X à valeurs dans $\mathbb{R}$ est dite semi-continue inférieurement en un point $x \in X$ si, et seulement si, pour tout $t < F(x)$ il existe un voisinage $U \in \mathcal{V}(x)$ tel que $t < F(y)$ pour tout $y \in U$. Si cela est vrai en tout point de X on dira que la fonction F est semi-continue inférieurement sur X. Toutes les fonctions n'étant pas semi-continue inférieurement on voudrait connaître la fonction semi-continue inférieurement la plus proche. C'est le rôle de la définition suivante :

Définition $\mathbb{I}$.1.
Nous appellerons *enveloppe semi-continue inférieurement* ou *fonction relaxée*, d'une fonction F la fonction $\mathrm{sci}(F)$ définie par

$$\mathrm{sci}(F)(x) = \sup_{G \in \mathcal{G}(F)} G(x) \qquad (\mathbb{I}\text{-}1)$$

où $\mathcal{G}(F)$ est l'ensemble des fonctions semi-continues inférieurement sur X telles que $G(y) \leq F(y)$ pour tout $y \in X$.

Propriétés $\mathbb{I}$.2.
Soit F une fonction de X dans $\overline{\mathbb{R}}$ alors

1. $\mathrm{sci}(F)$ *est une fonction semi-continue inférieurement ;*
2. $\mathrm{sci}(F)(x) = \sup_{U \in \mathcal{V}(x)} \inf_{y \in U} F(y)$ *;*

en sorte que F est semi-continue inférieurement si et seulement si $F = \mathrm{sci}(F)$.

Preuve. Notons $H(x) = \sup_{U \in \mathcal{V}(x)} \inf_{y \in U} F(y)$. Remarquons d'abord que, pour tout voisinage U de x, on a $\inf_{y \in U} F(y) \leq F(x)$ en sorte que l'on obtient $H(x) \leq F(x)$ pour tout $x \in X$.

Si $t < H(x)$ alors il existe un voisinage U de x tel que $t < \inf_{y \in U} F(y)$. Alors pour tout $z \in U$ il existe $W \in \mathcal{V}(z) \cap U$ qui vérifie $t < \inf_{y \in U} F(y) \leq \inf_{y \in W} F(y)$, ce qui implique que $t < \inf_{y \in W} F(y) \leq \sup_{W \in \mathcal{V}(z)} \inf_{y \in W} F(y) = H(z)$, ce qui prouve que H est semi-continue inférieurement.

Ainsi par définition de $\mathrm{sci}(F)$, on obtient l'inégalité $H \leq \mathrm{sci}(F)$. Soit à présent G une autre fonction semi-continue inférieurement telle que, pour tout

$x \in X$, $G(x) \leq F(x)$, alors on obtient que

$$\sup_{U\in\mathcal{V}(x)} \inf_{y\in U} G(y) \leq \sup_{U\in\mathcal{V}(x)} \inf_{y\in U} F(y) = H(x)$$

si on admet que $G(x) = \sup_{U\in\mathcal{V}(x)} \inf_{y\in U} G(y)$ quand G est semi-continue inférieurement, alors le résultat est démontré puisque cela implique $\mathrm{sci}(F) \leq H$. Démontrons donc cette dernière affirmation. Soit $t < t' < G(x)$. Puisque G est semi-continue inférieurement, il existe un voisinage de x, $W \in \mathcal{V}(x)$ tel que, pour tout point y de ce voisinage, $t < t' < G(y)$ donc $t < t' \leq \inf_{y\in W} G(y)$. On en déduit que $t < \sup_{U\in\mathcal{V}(x)} \inf_{y\in U} G(y)$, autrement dit si $t < G(x)$ alors $t < \sup_{U\in\mathcal{V}(x)} \inf_{y\in U} G(y)$. Ceci implique l'inégalité $G(x) \leq \sup_{U\in\mathcal{V}(x)} \inf_{y\in U} G(y)$, l'inégalité inverse étant immédiate.

Pour la dernière affirmation de la propriété si $F(x) = \mathrm{sci}(F)(x)$ alors F est égale à H qui est semi-continue inférieurement. Réciproquement si F est semi-continue inférieurement alors $F(x) = \sup_{U\in\mathcal{V}(x)} \inf_{y\in U} F(y) = H(x)$. ❏

Définition $\mathbb{I}$**.3.**
Une fonction $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ est *coercitive* si pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\{f \leq t\}$ est pré-compact. Elle est *légèrement coercitive* s'il existe un compact non vide $K \subset X$ tel que $\inf_X f = \inf_K f$.

Exemple $\mathbb{I}$**.4.** On montre par exemple qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est coercitive si, et seulement si, $\lim_{|x|\to+\infty} f(x) = +\infty$. Les fonctions $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ périodiques ne sont donc pas coercitives, mais légèrement coercitives.

I.1.b Cadre général

Donnons-nous une suite (F_j) de fonctions de X dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Définition $\mathbb{I}$**.5.**
La Γ*-limite inférieure* et la Γ*-limite supérieure* de la suite (F_j) sont les fonctions de X dans $\overline{\mathbb{R}}$ définies par

$$\begin{aligned}
\big(\Gamma\text{-}\liminf_{j\to\infty} F_j\big)(x) &= \sup_{U\in\mathcal{V}(x)} \liminf_{j\to\infty} \inf_{y\in U} F_j(y). \\
\big(\Gamma\text{-}\limsup_{j\to\infty} F_j\big)(x) &= \sup_{U\in\mathcal{V}(x)} \limsup_{j\to\infty} \inf_{y\in U} F_j(y).
\end{aligned}$$

S'il existe une fonction $F : X \to \overline{\mathbb{R}}$ telle que $\Gamma\text{-}\liminf_{j\to\infty} F_j = \Gamma\text{-}\limsup_{j\to\infty} F_j = F$, on dit que la suite (F_j) Γ*-converge vers* F .

Remarque $\mathbb{I}$**.6.** On peut se restreindre à une base de voisinage, au lieu de considérer $\mathcal{V}(x)$ dans son ensemble.

Ayant parlé de convergence uniforme et de convergence simple il est normale de s'intéresser aux liens et différences entre ces trois notions. Les exemples suivants (tiré de Dal-Maso [Mas93] chapitre 4) montrent qu'en général convergence simple et Γ-convergence sont indépendantes.

Exemples $\mathbb{I}$.7. Pour ces exemples $X = \mathbb{R}$.

(a) Si $F_n(x) = nxe^{-2n^2x^2}$, alors (F_n) converge simplement vers 0 tout en Γ-convergeant vers la fonction

$$F(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}e^{-1/2}, & \text{si } x = 0; \\ 0, & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

(b) Si $F_n(x) = \sin(nx)$ bien que cette suite ne converge pas simplement elle Γ-converge vers la fonction $F(x) = -1$.

Toutefois, il existe un résultat positif puisque :

Proposition $\mathbb{I}$.8.
On a les inégalités suivantes :

$$\Gamma\text{-}\liminf_{j\to\infty} F_j \leq \liminf_{j\to\infty} F_j, \qquad \Gamma\text{-}\limsup_{j\to\infty} F_j \leq \limsup_{j\to\infty} F_j$$

on en déduit que si la suite (F_j) Γ-converge vers F tout en convergeant simplement vers G, alors $F \leq G$.

Preuve. Il suffit de suivre les définitions. ❑

Intéressons-nous à présent à la convergence uniforme :

Proposition $\mathbb{I}$.9.
Si (F_j) converge uniformément vers F, alors (F_j) Γ-converge vers $\mathrm{sci}(F)$

Preuve. Supposons que la suite (F_j) converge uniformément vers F, alors, pour tout voisinage ouvert de X, on a (comme remarqué en introduction)

$$\lim_{j\to\infty} \inf_{y\in U} F_j(y) = \inf_{y\in U} F(y)$$

en sorte que, pour tout $x \in X$, on obtient

$$\sup_{U\in\mathcal{V}(x)} \lim_{j\to\infty} \inf_{y\in U} F_j(y) = \sup_{U\in\mathcal{V}(x)} \inf_{y\in U} F(y) = H(x)$$

or la propriété $\mathbb{I}$.2 nous dit justement que $H(x)$ est la fonction relaxée de F. ❑

Pour obtenir de meilleurs résultats il sera nécessaire d'ajouter des hypothèses, soit sur F, soit sur la manière de converger (décroissance...). Le lecteur désireux d'en savoir plus sur les liens entre ces convergences pourra se reporter au chapitre 5 de [Mas93].

I.1.c Le cas des espaces métriques

Dans les espaces métriques, on obtient une caractérisation de la Γ-convergence à l'aide des suites.

Théorème $\mathbb{I}$.10.
Soit (X, d) un espace métrique. Une suite de fonctions (F_j) Γ-converge vers F, si, et seulement si, pour tout $x \in X$, les deux propriétés suivantes sont vérifiées :

1. *Pour toute suite (x_j) convergeant vers x*
$$F(x) \leq \liminf_{j\to\infty} F_j(x_j). \tag{$\mathbb{I}$-2}$$
2. *Il existe une suite (x_j) convergeant vers x telle que*
$$F(x) = \lim_{j\to\infty} F_j(x_j). \tag{$\mathbb{I}$-3}$$

Preuve. Supposons que (F_j) Γ-converge vers F et considérons une suite (x_j) convergeant vers x, on a

$$F(x) = \sup_{U\in\mathcal{V}(x)} \liminf_{j\to\infty} \inf_{y\in U} F_j(y),$$

Considérons U un voisinage de x. À partir d'un certain rang $x_j \in U$, en sorte que $\inf_{y\in U} F_j(y) \leq F_j(x_j)$ et donc $\liminf_{j\to\infty} \inf_{y\in U} F_j(y) \leq \liminf_{j\to\infty} F_j(x_j)$, en passant à la borne supérieure sur les U on conclut. De même on remarque qu'en général $\big(\Gamma\text{-}\limsup F_n\big)(x) \leq \limsup_{j\to\infty} F_j(x_j)$.

Considérons x tel que $F(x) < +\infty$ et soit (U_k) une base dénombrable de voisinages de x, telle que $U_{k+1} \subset U_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et soit (s_k) une suite décroissante convergeant vers $F(x)$ dans $\mathbb{R}$ telle que $s_k > F(x)$ pour tout k, par définition de $F(x)$:
$$s_k > F(x) \geq \limsup_{j\to\infty} \inf_{y\in U_k} F_j(y)$$
pour tout k. Ainsi il existe une suite croissante d'entiers j_k telle que

$$s_k > \inf_{y\in U_k} F_j(y)$$

pour tout $j > j_k$. On en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $y_k^j \in U_k$ tel que $s_k > F_j(y_k^j)$. On définit alors la suite (x_j) en posant $x_j = x$ si $j \leq j_1$ et $x_j = y_k^j$ si $j_k \leq j < j_{k+1}$. Comme $x_j \in U_k$, pour tout $j \geq j_k$, la suite (x_j) converge vers x dans X, et comme $s_k > F_j(x_j)$ pour tout $j \geq j_k$ on obtient

$$F(x) = \lim_{k\to\infty} s_k \geq \limsup_{j\to\infty} F_j(x_j) \geq \liminf_{j\to\infty} F_j(x_j) \geq F(x)$$

Réciproquement : Soient $\underline{F} = \Gamma\text{-}\liminf F_n$ et $\overline{F} = \Gamma\text{-}\limsup F_n$, on veut démontrer l'égalité de ces deux fonctions. Par ce qui précède on a, pour tout x, une suite $x_j \to x$ telle que

$$\underline{F}(x) \leq \liminf F_j(x_j) = F(x), \qquad \overline{F}(x) \leq \limsup F_j(x_j) = F(x)$$

il suffit donc de démontrer que $F(x) \leq \underline{F}(x)$ et $F(x) \leq \overline{F}(x)$. Or, en procédant comme ci-dessus, on montre qu'il existe une suite $x_j \longrightarrow x$ telle que $\overline{F}(x) = \limsup_{j\to\infty} F_j(x_j)$, pour cette suite on aura aussi $F(x) \leq \limsup_{j\to\infty} F_j(x_j)$ par hypothèse, en sorte que $F(x) = \overline{F}(x)$.

Pour terminer la démonstration il suffit donc de démontrer qu'il existe une suite $x_j \longrightarrow x$ telle que $\underline{F}(x) = \liminf_{j\to\infty} F_j(x_j)$. Pour cela soit $x \in X$ tel que $\underline{F}(x) < \infty$ et (U_k) une base dénombrable de voisinages de x, telle que $U_{k+1} \subset U_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et soit (s_k) une suite convergeant vers $\underline{F}(x)$ dans $\mathbb{R}$ telle que $s_k > \underline{F}(x)$ pour tout k. Par définition de $\underline{F}(x)$:

$$s_k > \underline{F}(x) \geq \liminf_{j\to\infty} \inf_{y\in U_k} F_j(y)$$

pour tout k, ainsi il existe une suite strictement croissante d'entiers j_k telle que pour tout k

$$s_k > \inf_{y\in U_k} F_{j_k}(y).$$

Donc pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $y_k \in U_k$ tel que $s_k > F_{j_k}(y_k)$. On définit alors la suite (x_j) en posant $x_j = y_k$ si $j = j_k$ et $x_j = x$ sinon. Comme $x_j \in U_k$ pour tout $j \geq j_k$, la suite (x_j) converge vers x dans X, et comme $x_{j_k} = y_k$ on obtient

$$\underline{F}(x) = \lim_{k\to\infty} s_k \geq \liminf_{k\to\infty} F_{j_k}(y_k) \geq \liminf_{j\to\infty} F_j(x_j) \geq F(x)$$

ce qui conclut la preuve. ❑

Remarque I.11. La démonstration du théorème précédent induit une caractérisation par les suites des Γ-limites inférieures et supérieures d'une suite de fonctions. On remarque que la preuve est encore valide pour des espaces possédant une base dénombrable d'ouverts. Dans la littérature c'est souvent cette définition par les suites qui est donnée et en pratique c'est celle-là qui est la plus utilisée.

On dira qu'une famille de fonctions est légèrement equi-coercitive, s'il existe un compact $K \subset X$ tel que pour chaque fonction de la famille la borne inférieure sur ce compact, soit égale à la borne inférieure sur X.

Théorème I.12.
Soit (X, d) un espace métrique, et supposons que la suite (F_j) soit légèrement equi-coercitive sur X et $\Gamma\text{-}\lim_{j\to\infty} F_j = F$ alors l'infimum de F sur X est un minimum et

$$\min_X F = \lim_{j\to\infty} \inf_X F_j$$

de plus si la suite (x_j) converge vers x telle que $\lim_j F_j(x_j) = \lim_{j\to\infty} \inf_X F_j$ alors la limite est un point minimum pour F

Preuve. La suite (F_j) étant légèrement equi-coercitive, on peut trouver une suite (x_j) contenue dans un compact telle que

$$\liminf_j F_j(x_j) = \liminf_j \inf_X F_j$$

on peut donc trouver une sous-suite de (x_j) convergeant vers x et que l'on note encore (x_j) telle que

$$\lim_j F_j(x_j) = \liminf_j \inf_X F_j$$

alors par définition de la Γ-convergence

$$\inf_X F \le F(x) \le \lim_j F_j(x_j) = \liminf_j \inf_X F_j$$

mais en plus on peut trouver, pour tout $y \in X$, une suite (y_j) convergeant vers y et vérifiant

$$\limsup_j \inf_X F_j \le \limsup F_j(y_j) = F(y).$$

En passant à la borne inférieure sur les $y \in X$ on obtient finalement

$$\limsup_j \inf_X F_j \le \inf_X F \le F(x) \le \liminf_j \inf_X F_j \le \limsup_j \inf_X F_j$$

en sorte que l'on obtient la convergence de la suite $(\inf_X F_j)$, vers une valeur de F, qui n'est autre que le minimum de F.

Dans la preuve que l'on vient de faire la seule hypothèse sur (x_j) que l'on a utilisée est $\lim_j f_j(x_j) = \lim_{j\to\infty} \inf_X F_j$. La dernière assertion est par conséquent démontrée. ❑

I.2 Propriétés de la Γ-convergence

Nous n'allons pas étudier les propriétés les plus générales, pour cela nous renvoyons à [Mas93] et à la large bibliographie qui y est incluse, et puisque, en fin de compte, nous allons utiliser cette convergence sur des espaces fonctionnels (L^2, H^1...) il est tout naturel d'étudier à présent :

I.2.a La Γ-convergence dans les espaces vectoriels normés

Dans ce qui suit X sera un espace vectoriel normé réel. On se donne une suite (F_j) de fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$. Comme nous allons le voir certaines propriétés potentiellement partagées par les F_j vont passer à la limite.

Théorème I.13.
Si toutes les F_j sont convexes il en est de même pour $\Gamma\text{-}\limsup F_j$.

Preuve. Commençons par noter $\overline{F} = \Gamma\text{-}\limsup F_j$ et supposons donc que pour tout j, F_j est convexe. Prenons alors x_1 et x_2 deux points tels que $\overline{F}(x_i) < +\infty$ et soit $t \in [0, 1]$ et notons $x = tx_1 + (1-t)x_2$. Par continuité de l'application

$$(u, v) \mapsto tu + (1-t)v$$

de $X \times X \to X$, pour tout $U \in \mathcal{V}(x)$, on peut trouver deux voisinages, $U_1 \in \mathcal{V}(x_1)$ et $U_2 \in \mathcal{V}(x_2)$, tels que l'ensemble

$$V = \{ty_1 + (1-t)y_2 \mid y_1 \in U_1, y_2 \in U_2\} \subset U.$$

Alors, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$\inf_{y \in U} F_j(y) \le \inf_{y \in V} F_j(y) \le \inf_{y_1 \in U_1} \inf_{y_2 \in U_2} F_j(ty_1 + (1-t)y_2). \tag{$\mathbb{I}$-4}$$

Comme pour $i = 1, 2$

$$\limsup_{j \to \infty} \inf_{y_i \in U_i} F_j(y_i) \le \overline{F}(x_i) < +\infty \tag{$\mathbb{I}$-5}$$

il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $j \ge k$, $\inf_{y_i \in U_i} F_j(y_i) < +\infty$, en sorte, que pour $j \ge k$, on obtient en utilisant l'hypothèse de convexité

$$\inf_{y_1 \in U_1} \inf_{y_2 \in U_2} F_j(ty_1 + (1-t)y_2) \le t \inf_{y_1 \in U_1} F_j(y_1) + (1-t) \inf_{y_2 \in U_2} F_j(y_2) \tag{$\mathbb{I}$-6}$$

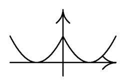
et maintenant l'utilisation des inégalités ($\mathbb{I}$-4), ($\mathbb{I}$-5) et ($\mathbb{I}$-6) nous donne

$$\limsup_{j \to \infty} \inf_{y \in U} F_j(y) \le t\overline{F}(x_1) + (1-t)\overline{F}(x_2)$$

ceci pour tout voisinage U de x. En passant à la borne supérieure sur U on obtient finalement $\overline{F}(x) \le t\overline{F}(x_1) + (1-t)\overline{F}(x_2)$, donc $\overline{F}$ est convexe. ❏

Remarque $\mathbb{I}$.14. Comme le montre l'exemple qui suit la Γ-limite inférieure ne partage généralement pas cette propriété. On prend $X = \mathbb{R}$ et $F_n(x) = \big(x - (-1)^n\big)^2$ alors par la propriété $\mathbb{I}$.8 (et la caractérisation par les suites) on obtient

$$\Gamma\text{-}\liminf_{j \to \infty} F_j = \inf\big((x-1)^2, (x+1)^2\big) \quad \rightsquigarrow$$



qui n'est pas convexe.

Définition $\mathbb{I}$.15.
On dira qu'une fonction $F : X \to \mathbb{R}$ est *paire* (resp. *impaire*) si $F(-x) = F(x)$ (resp. $F(-x) = -F(x)$) pour tout $x \in X$.

Proposition $\mathbb{I}$.16.
Si toutes les fonctions F_j sont paires alors il en est de même pour les Γ-limites supérieure et inférieure.

Preuve. On note une fois de plus

$$\underline{F} = \Gamma\text{-}\liminf F_n \qquad\qquad \overline{F} = \Gamma\text{-}\limsup F_n$$

Il suffit de montrer que pour tout x on a $\underline{F}(-x) \le \underline{F}(x)$. Comme la fonction $y \mapsto -y$ est un homéomorphisme, pour tout $U \in \mathcal{V}(-x)$ l'ensemble $V = \{-y \mid y \in U\}$ est un voisinage de x. De sorte que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a :

$$\inf_{y\in U} F_j(y) = \inf_{y\in V} F_j(-y) = \inf_{y\in V} F_j(y)$$

et donc

$$\liminf_{j\to\infty} \inf_{y\in U} F_j(y) = \liminf_{j\to\infty} \inf_{y\in V} F_j(y) \le \underline{F}(x)$$

on passe à présent à la borne supérieure sur les voisinages U de $-x$ pour terminer. On procède de manière similaire pour $\overline{F}$. ❑

Remarque $\mathbb{I}$**.17.** Soit $X = \mathbb{R}$ et soit $F_n(x) = x\cos(nx)$. Toutes les fonctions F_n sont impaires, cependant on montre que la Γ-limite est $F(x) = -|x|$ qui est paire.

Définition $\mathbb{I}$**.18.**
Soit $p \in \mathbb{R}$: on dira qu'une fonction $F : X \to \mathbb{R}$ est *positivement homogène de degré* p si, pour tout $t < 0$ et pour tout $x \in X$, on a $F(tx) = t^p F(x)$

Proposition $\mathbb{I}$**.19.**
Si toutes les (F_j) *sont positivement homogènes de degré* p *il en est de même pour les* Γ*-limites supérieure et inférieure.*

Preuve. Soit $t > 0$, comme la fonction $x \mapsto tx$ est continue, pour tout voisinage $U \in \mathcal{V}(tx)$, $W = (1/t)U$ est un voisinage de x. Ce qui implique que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a :

$$\inf_{y\in U} F_j(y) \le \inf_{y\in W} F_j(ty) = t^p \inf_{y\in W} F_j(y)$$

donc

$$\liminf_{j\to\infty} \inf_{y\in U} F_j(y) \le t^p \liminf_{j\to\infty} \inf_{y\in W} F_j(y) \le t^p(\Gamma\text{-}\liminf F_j)(x).$$

en prenant la borne supérieure sur tous les U on obtient

$$(\Gamma\text{-}\liminf F_j)(tx) \le t^p(\Gamma\text{-}\liminf F_j)(x),$$

ce qui suffit. On procède de même pour la Γ-limite supérieure. ❑

Définition $\mathbb{I}$**.20.**
On dira d'une application $F : X \to [0, +\infty]$ qu'elle est une *forme quadratique à valeurs étendues* si c'est une forme quadratique sur un sous-espace Y (que l'on notera $D(F)$) de X et si elle vaut $+\infty$ sur $X\backslash Y$.

On a la proposition suivante, caractérisant les formes quadratiques à valeurs étendues :

Proposition $\mathbb{I}$**.21.**
Soit $F : X \to [0, +\infty]$ *une fonction quelconque. Si*

(a) $F(0) = 0$,

(*b*) $F(tx) \leq t^2 F(x)$ *pour tout* $x \in X$ *et* $t > 0$,

(*c*) $F(x+y) + F(x-y) \leq 2F(x) + 2F(y)$ *pour tout* $x, y \in X$,

alors F *est une forme quadratique à valeurs étendues. Réciproquement, si* F *est une forme quadratique à valeurs étendues alors les deux dernières conditions sont des égalités.*

Preuve. cf. par exemple [Mas93] chapitre 11 pages 128–131. ❏

On peut à présent énoncer le théorème suivant

Théorème $\mathbb{I}$.22.
Si la suite (F_j) Γ*-converge vers une fontion* F*, et si toutes les fonctions* F_j *sont des formes quadratiques à valeurs étendues positives alors* F *l'est aussi.*

Preuve. La positivité passe de manière évidente à la limite, par conséquent il suffit de montrer que F vérifie les conditions de la proposition $\mathbb{I}$.21.

La condition (a) : pour tous les j on a $F_j(0) = 0$ en sorte que $F(0) \leq 0$ suivant la proposition $\mathbb{I}$.8, la positivité faisant le reste.

Puisque toutes les fonctions sont homogène de degré 2 il en est de même par la proposition $\mathbb{I}$.19 pour F.

Vérifions la condition (c), i.e. l'inégalité du parallélogramme. Soient x_1 et $x_2 \in X$ puisque les deux fonctions $(y_1, y_2) \mapsto y_1 + y_2$ et $(y_1, y_2) \mapsto y_1 - y_2$ sont continues de $X \times X$ dans X, pour tout voisinage $U \in \mathcal{V}(x_1 + x_2)$ et $V \in \mathcal{V}(x_1 - x_2)$ il existe des voisinages $W_i \in \mathcal{V}(x_i)$, pour $i = 1, 2$, tels que,

$$\{y_1 + y_2 \mid y_1 \in W_1, y_2 \in W_2\} \subset U, \qquad \{y_1 - y_2 \mid y_1 \in W_1, y_2 \in W_2\} \subset V,$$

et puisque les fonctions F_j sont toutes des formes quadratiques étendues elles vérifient :

$$\begin{aligned}
\inf_{y\in U} F_j(y) + \inf_{z\in V} F_j(z) &\leq \inf_{y_1\in W_1}\inf_{y_2\in W_2} F_j(y_1+y_2) + \inf_{y_1\in W_1}\inf_{y_2\in W_2} F_j(y_1-y_2)\\
&\leq \inf_{y_1\in W_1}\inf_{y_2\in W_2} \big(F_j(y_1+y_2) + F_j(y_1-y_2)\big)\\
&\leq 2\inf_{y_1\in W_1} F_j(y_1) + 2\inf_{y_2\in W_2} F_j(y_2)
\end{aligned}$$

on en déduit que

$$\begin{aligned}
\liminf_{j\to\infty}\inf_{y\in U} F_j(y) + \limsup_{j\to\infty}\inf_{z\in V} F_j(z) &\leq \limsup_{j\to\infty}\big(\inf_{y\in U} F_j(y) + \inf_{z\in V} F_j(z)\big)\\
&\leq 2\limsup_{j\to\infty}\inf_{y_1\in W_1} F_j(y_1) + 2\limsup_{j\to\infty}\inf_{y_2\in W_2} F_j(y_2) \leq 2F(x_1) + 2F(x_2)
\end{aligned}$$

ceci pour tout $U \in \mathcal{V}(x_1 + x_2)$ et $V \in \mathcal{V}(x_1 - x_2)$. En passant à la borne supérieure sur U et V on obtient $F(x_1 + x_2) + F(x_1 - x_2) \leq 2F(x_1) + 2F(x_2)$. ❏

C'est une des raisons pour lesquels la Γ-convergence est utile. Puisque nous nous intéressons précisément aux formes quadratiques, ceci nous indique que la limite éventuelle aura la forme espérée.

I.2.b Compacité et Γ-convergence

Dans l'étude de certaines équations différentielles, on peut être amené à passer par une famille d'équations permettant d'approcher la solution ; équations intermédiaires que l'on sait résoudre, contrairement au problème initial. L'étape suivante (ou parallèle) consistant à parvenir à récupérer l'existence en faisant converger dans un certain sens les solutions intermédiaires. Pour cela on introduit une topologie adaptée au problème, en espérant qu'elle possède le plus de compacts possible. C'est ce que l'on fait avec la méthode des éléments finis, par exemple.

Par conséquent, pour que la Γ-convergence soit intéressante, il faut que la théorie contienne des théorèmes dit de compacité. En voici quelques-uns.

Proposition $\mathbb{I}$.23.
Soit (X, d) un espace métrique séparable, et (F_j) une suite de fonctions de $X \to \overline{\mathbb{R}}$. Alors il existe une suite croissante (j_k) telle que la suite (F_{j_k}) soit Γ-convergente.

Preuve. Soit (U_k) une base dénombrale d'ouverts pour la topologie de X. Comme $\overline{\mathbb{R}}$ est compact, il existe une suite croissante d'entiers $(\sigma_j^0)_j$ telle que

$$\lim_j \inf_{y \in U_0} F_{\sigma_j^0}(y)$$

existe. Alors pour tout $k \geq 1$ on définit la suite $(\sigma_j^k)_j$ comme sous-suite de $(\sigma_j^{k-1})_j$ suivant laquelle

$$\lim_j \inf_{y \in U_k} F_{\sigma_j^k}(y)$$

existe. On prend alors la diagonale $j_k = \sigma_k^k$, afin que, pour cette suite,

$$\lim_k \inf_{y \in U_l} F_{j_k}(y)$$

existe pour tout $l \in \mathbb{N}$. En particulier on aura

$$\liminf_k \inf_{y \in U_l} F_{j_k}(y) = \limsup_k \inf_{y \in U_l} F_{j_k}(y)$$

❑

Remarque $\mathbb{I}$.24. Sans la condition de séparabilité, la proposition est fausse en générale. Par exemple considérons $X = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ munis de la topologie discrète. X est métrisable et la Γ-convergence se confond alors avec la convergence simple. Prenons la suite $f_j : X \to \{-1, 1\}$ définie par $f_j(\mathbf{x}) = x_j$ si $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \ldots)$. Si f_{j_k} est une sous-suite, prenons $\mathbf{x}$ défini par $x_{j_k} = (-1)^k$ et $x_j = 1$ si $j \notin \{j_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Alors la limite $\lim_k f_{j_k}(\mathbf{x})$ n'existe pas de sorte qu'aucune sous-suite ne converge.

Plaçons nous dans un cadre encore plus particulier (mais proche de notre problématique). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathcal{A}$ l'ensemble des sous ensembles ouverts de Ω et $W^{1,p}(\cdot)$ l'espace de Sobolev des fonctions $u \in L^p$ avec $Du \in L^p$.

Supposons que $p > 1$ et soit $\alpha \geq \beta > 0$. Posons $\mathcal{I} = \mathcal{I}(p, \alpha, \beta)$ la classe des fonctionnelles $F : L^p(\Omega) \times \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ pour lesquelles il existe une fonction de Borel $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ telle que :

(i) $F(u, A) = \begin{cases} \int_A f\big(x, Du(x)\big)dx, & \text{si } u \in W^{1,1}_{loc}(A), \\ +\infty, & \text{sinon,} \end{cases}$

(ii) $\alpha|\xi|^p \leq f(x, \xi) \leq \beta(|\xi|^p + 1)$

pour tout $u \in L^p(\Omega)$, $A \in \mathcal{A}$, $x \in \Omega$, $\xi \in \mathbb{R}^n$. On a le théorème suivant dont nous ne donnerons pas la preuve (cf. chapitre 12 de [BD98] et chapitre 20 de [Mas93]) :

Théorème $\mathbb{I}$.25.
Pour toute suite (F_n) de fonctionnelles dans la classe $\mathcal{I}$ il existe une sous-suite F_{n_k} et une fonctionnelle F dans la classe $\mathcal{I}$ telles que $(F_{n_k}(\cdot, A))$ Γ-converge vers $F(\cdot, A)$ dans $L^p(\Omega)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.

Donnons enfin une version adaptée à l'étude des opérateurs elliptiques (tel que le laplacien auquel nous nous intéressons). Prenons α et β deux réels strictements positifs et Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On note $E(\Omega)$ l'ensemble des matrices carrées symétriques $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ à coefficients dans $L^\infty(\Omega)$, telles que pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ et presque tout $x \in \Omega$, on ait :

$$\alpha|\xi|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \beta|\xi|^2. \tag{$\mathbb{I}$-7}$$

Parallèlement on notera $\mathcal{Q}(\Omega)$ l'ensemble des fonctionnelles quadratiques de la forme

$$\begin{aligned} F : L^2(\Omega) \times \mathcal{A} &\to [0, +\infty] \\ (u, A) &\mapsto \begin{cases} \int_A \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_j u D_i u\right) dx, & \text{si } u \in H^1(A) \\ +\infty, & \text{sinon,} \end{cases} \end{aligned} \tag{$\mathbb{I}$-8}$$

avec $(a_{ij}) \in E(\Omega)$. On dira que F est la fonctionnelle quadratique associée à la matrice (a_{ij}). Alors on a le théorème suivant :

Théorème $\mathbb{I}$.26.
Pour toute suite (F_j) dans $\mathcal{Q}(\Omega)$ il existe une sous-suite (F_{j_k}) et une fonctionnelle $F \in \mathcal{Q}(\Omega)$ telles que $(F_{j_k}(\cdot, A))$ Γ-converge vers $F(\cdot, A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$

Preuve. On remarque que $\mathcal{Q}(\Omega) \subset \mathcal{I}(2, \alpha, \beta)$ en sorte que, par le théorème $\mathbb{I}$.25, il existe une sous-suite (F_{j_k}) et une fonctionnelle $F \in \mathcal{I}(2, \alpha, \beta)$ telles que F_{j_k} Γ-converge vers $F(\cdot, A)$ dans $L^2(\Omega)$. Le théorème $\mathbb{I}$.22 quant à lui nous indique que F est bien une forme quadratique (Preuve complète chapitres 19, 20 et 22 de [Mas93]). ❏

I.3 Un cas particulier : l'homogénéisation

L'homogénéisation consiste en la recherche de la Γ-limite éventuelle quand $\epsilon \to 0$ des fonctionnelles de la forme :

$$F_\epsilon(u) = \int_\Omega f\left(\frac{x}{\epsilon}, Du(x)\right) dx.$$

Elles sont associées à des problèmes de matériaux microscopiquement hétérogènes, dont le comportement macroscopique est celui d'un matériau homogène, d'où le terme «homogénéisation». Le but est donc de chercher les caractéristiques du matériau homogène décrivant le comportement macroscopique. Dans ce cas on a un certain nombre de méthodes, et même de résultats suivant la forme de la fonction f. Pour en savoir plus on pourra consulter [BD98], ou bien [BLP78]. Nous donnons ici quelques exemples relatifs à notre étude, dont les résultats précisent le théorème $\mathbb{I}$.26.

Dans ce qui suit nous noterons $M^{m\times n}$ l'ensemble des matrices à m lignes et n colonnes et on rappelle que $W^{1,p}$ est l'espace de Sobolev des fonctions u qui sont L^p ainsi que leur jacobienne.

I.3.a Homogénéisation à une dimension

Étudions la Γ-convergence des fonctionnelles de la forme

$$F_\epsilon(u) = \int_\Omega f\left(\frac{t}{\epsilon}, u'(t)\right) dt, \quad u \in W^{1,p}(0,1)$$

où $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$ est une fonction telle que

$$\begin{cases} f(t,\cdot) & \text{est continue pour presque tout } t \in \mathbb{R}\,; \\ f(t,\cdot) & \text{est convexe pour tout } t \in \mathbb{R}\,; \\ f(\cdot,x) & \text{est mesurable pour tout } x \in \mathbb{R}\,; \\ f(\cdot,x) & \text{est 1-périodique pour tout } x \in \mathbb{R}\,; \end{cases}$$

de plus, il existe $p > 1$ tel que pour tout $(t,x) \in \mathbb{R}^2$

$$|x|^p \leq f(t,x) \leq \beta\big(1 + |x|^p\big) \tag{$\mathbb{I}$-9}$$

alors il existe une fonction convexe $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telle que pour toute suite (ε_j) on ait

$$\int_0^1 f_0(u')dt = \Gamma\text{-}\lim_j F_{\varepsilon_j}(u) \tag{$\mathbb{I}$-10}$$

pour tout $u \in W^{1,p}(0,1)$.

Pour parvenir à démontrer cela on va chercher à calculer f_0 à priori. L'inégalité de Jensen nous permet d'exprimer f_0 comme un minimum :

$$f_0(x) = \min\left\{\int_0^1 f_0(u' + x)dt : u(0) = u(1) = 0\right\}$$

alors en appliquant I-10 avec $\varepsilon_j = 1/j$ on « devine » que

$$\begin{aligned}
f_0(x) &= \lim_j \min \left\{ \int_0^1 f(jt, u' + x)dt : u(0) = u(1) = 0 \right\} \\
&= \lim_j \min \left\{ \int_0^1 f(jt, u' + x)dt : u(0) = u(1) \right\} \\
&= \lim_j \min \left\{ \frac{1}{j} \int_0^j f(t, u' + x)dt : u(0) = u(j) \right\} \\
&= \lim_j \min \left\{ \frac{1}{j} \int_0^j f(t, u' + x)dt : u \text{ est } j \text{ périodique} \right\}
\end{aligned}$$

montrons que

$$\inf \left\{ \frac{1}{j} \int_0^j f(t, u' + x)dt : u \text{ est } j \text{ périodique} \right\} = \min \left\{ \int_0^1 f(t, u' + x)dt : u \text{ est } 1 \text{ périodique} \right\}$$

en effet on peut facilement montrer que

$$\inf \left\{ \frac{1}{j} \int_0^j f(t, u' + x)dt : u \text{ est } j \text{ périodique} \right\} \leq \min \left\{ \int_0^1 f(t, u' + x)dt : u \text{ est } 1 \text{ périodique} \right\}$$

quant à l'inégalité inverse, on prend une fonction u j-périodique, et on définit

$$v(t) = \frac{1}{j} \sum_{i=0}^{j-1} u(t+i)$$

qui est alors une fonction 1-périodique en sorte que

$$\begin{aligned}
\inf \left\{ \int_0^1 f(t, w' + x)dt : w \text{ est } 1 \text{ périodique} \right\} &\leq \int_0^1 f(t, v' + x)dt \\
&= \frac{1}{j} \int_0^j f(t, v' + x)dt \\
&= \frac{1}{j} \int_0^j f\Big(t, \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{j}(u'(t+i) + x)\Big)dt \\
\text{(convexité)} \qquad &\leq \frac{1}{j} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{j} \int_0^j f(t, u'(t+i) + x)dt \\
&= \frac{1}{j} \int_0^j f(t, u'(t) + x)dt
\end{aligned}$$

d'où l'inégalité inverse. Ainsi la recherche de f_0 revient à résoudre le problème cellulaire :

$$f_0(x) = \min \left\{ \int_0^1 f(t, u' + x)dt : u \text{ est 1-périodique} \right\}$$

on dispose aussi d'une autre formule, dite formule asymptotique homogène :

$$f_0(x) = \lim_{T \to +\infty} \min \left\{ \frac{1}{T} \int_0^T f(t, u' + x)dt : u(0) = u(T) = 0 \right\}$$

Pour montrer la Γ-convergence il suffit de se restreindre aux fonctions affines par morceaux (en fait à un sous ensemble dense de $W^{1,p}$).

I.3.b Homogénéisation périodique

Nous allons donner l'énoncé qui généralise ce qui vient d'être dit. On considère une fonction borelienne $f : \mathbb{R}^n \times M^{m\times n} \to R^+$ satisfaisant aux conditions suivantes :

(i) (Périodicité)

$$f(\cdot, A) \text{ est } \mathbb{Z}^n\text{-périodique, pour tout } A \in M^{m\times n}, \qquad (\mathbb{I}\text{-}11)$$

i.e $f(x + k, A) = f(x, A)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{Z}$.

(ii) (Condition de croissance standard) il existe deux constantes $0 < \alpha \leq \beta$ et $p > 1$ telles que

$$\alpha|A|^p \leq f(x, A) \leq \beta\big(1 + |A|^p\big), \qquad (\mathbb{I}\text{-}12)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et $A \in M^{m\times n}$.

Enfin, on se donne un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ et on pose, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$,

$$F_\varepsilon(u) = \int_\Omega f\left(\frac{x}{\varepsilon}, Du(x)\right) dx.$$

Ceci introduit, on peut énoncer le résultat suivant, dont nous ne donnons pas la démonstration (cf. [BD98] chapitre 14)

Théorème $\mathbb{I}$.27.
Soient f et F_ε comme ci-dessus, alors, pour toute suite $\varepsilon_j \to 0$,

$$\Gamma\text{-}\lim_{j\to+\infty} F_{\varepsilon_j}(u) = \int_\Omega f_{hom}\big(Du(x)\big)\, dx,$$

pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$, où $f_{hom} : M^{m\times n} \to \mathbb{R}^+$ est une fonction satisfaisant la formule asymptotique homogène :

$$f_{hom}(A) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t^n} \inf \left\{ \int_{]0,t[^n} f\big(x, A + Du(x)\big)dx : u \in W_0^{1,p}\big(]0, t[^n; \mathbb{R}^m\big) \right\}$$

pour tout $A \in M^{m\times n}$.

Remarque $\mathbb{I}$.28. La fonction f_{hom} possède d'autres propriétés, elle est notamment quasi-convexe. Nous renvoyons une fois de plus à [BD98] 5.3, pour plus de détails. Notons cependant que, comme dans le cas à une dimension, si, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $f(x,\cdot)$ est convexe, f_{hom} est la solution du problème cellulaire suivant :

$$f_{hom}(A) = \inf \left\{ \int_{]0,1[^n} f\big(y, A + Du(y)\big)\, dy : u \in W^{1,p}_{\#}\big(]0,1[^n;\mathbb{R}^m\big) \right\}$$

pour tout $A \in M^{m\times n}$ avec

$$W^{1,p}_{\#}\big(]0,1[^n;\mathbb{R}^m\big) = \left\{ u \in W^{1,p}_{\mathrm{loc}} : u\ \mathbb{Z}^n\text{-périodique} \right\}.$$

I.3.c Homogénéisation presque périodique

Définition $\mathbb{I}$.29.
Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach complexe. On dira d'une fonction $v : \mathbb{R}^n \to X$ qu'elle est *uniformément presque périodique* si elle est la limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques sur X i.e. $\lim_k \|P_k - v\|_\infty = 0$ pour des fonctions de la forme,

$$P_k(y) = \sum_{j=1}^{r_k} x_j^k \exp i\langle \lambda_j^k, y\rangle,$$

avec $x_j^k \in X$, $\lambda_j^k \in \mathbb{R}^N$ et $r_k \in \mathbb{N}$.

On considère une fonction $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times M^{m\times n} \to \mathbb{R}$ satisfaisant la condition de croissance

$$\alpha|A|^p \le f(x,s,A) \le \beta\big(1+|A|^p\big) \tag{$\mathbb{I}$-13}$$

pour tout $(x,s,A) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times M^{m\times n}$ et pour un $p > 1$. On demande de plus que les deux ensembles

$$\begin{gathered} T^A_\eta = \Big\{ \tau \in \mathbb{R}^n : \big| f(x+\tau, s+A\tau, Y) - f(x,s,Y)\big| < \eta\big(1+|Y|^p\big) \\ \text{pour tout } (x,s,Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times M^{m\times n} \Big\} \\ T^0_\eta = \Big\{ \tau \in \mathbb{R}^m : \big| f(x, s+\tau, Y) - f(x,s,Y)\big| < \eta\big(1+|Y|^p\big) \\ \text{pour tout } (x,s,Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times M^{m\times n} \Big\} \end{gathered} \tag{$\mathbb{I}$-14}$$

soient relativement dense dans $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement (i.e. il existe $L > 0$ tel que $T^A_\eta + [0,L[^n = \mathbb{R}^n$ et $T^0_\eta + [0,L[^m = \mathbb{R}^m$).

Remarque. Ceci provient d'une caractérisation des fonctions uniformément presque périodique. (cf. [BD98] théorème A.6)

Enfin, on définit, pour Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega; R^m)$,

$$F_\varepsilon(u) = \int_\Omega f\Big(\frac{x}{\varepsilon}, \frac{u(x)}{\varepsilon}, Du(x)\Big)dx$$

alors on a

Théorème $\mathbb{I}$.30.
Soit f vérifiant les hypothèses $\mathbb{I}$-13 et $\mathbb{I}$-14, F_ε comme ci-dessus alors il existe une fonction $f_{hom} : M^{m\times n} \to \mathbb{R}$ telle que, pour tout ouvert borné Ω, $u \in W^{1,p}(\Omega; R^m)$ et toute suite $\varepsilon_j \to 0$:

$$\Gamma\text{-}\lim_{j\to+\infty} F_{\varepsilon_j}(u) = \int_\Omega f_{hom}\big(Du(x)\big)dx,$$

la fonction f_{hom} satisfaisant de plus à la formule asymptotique homogène

$$f_{hom}(A) = \lim_{t\to+\infty} \inf\left\{ \frac{1}{t^n}\int_{]0,t[^n} f\big(x, u(x)+Ax, Du(x)+A\big)dx : u \in W_0^{1,p}(]0,t[^n; R^m)\right\} \quad (\mathbb{I}\text{-}15)$$

pour tout $A \in M^{m\times n}$

Remarque $\mathbb{I}$.31. Pour la démonstration de ce théorème voir [BD98] chapitre 15. Nous verrons une utilisation de ce théorème liée à la norme stable en $\mathbb{III}$. La fonction f_{hom} est également *quasi-convexe* : quand nous l'appliquerons nous obtiendrons une fonction convexe.

II Analyse fonctionnelle et mm-espaces

II.1 Filets et convergence de Gromov-Hausdorff

II.1.a Ensembles ordonnés et filets

Pour définir une topologie donnée, le cas le plus agréable est le cas des espaces métriques où celle-ci peut être décrite à l'aide des suites. Il est ainsi tentant de définir une topologie en définissant la convergence des suites, mais cela ne suffit pas. Pour s'en convaincre considérons l'espace $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$, muni de la topologie produit (la convergence simple). Le sous-ensemble des fonctions continues $C(\mathbb{R})$ est un sous-espace de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$. Tentons de déterminer son adhérence à l'aide des suites. Si on considère une suite de fonctions continues (f_n) convergeant simplement vers f, alors f est borel mesurable. Ainsi l'ensemble des limites des suites convergentes à éléments dans $C(\mathbb{R})$ est un sous ensemble distinct de $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$. Cependant $C(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathbb{C}^{\mathbb{R}}$. En effet si $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}}$ les ensembles

$$\left\{g \in \mathbb{C}^{\mathbb{R}} : \left|g(x_j) - f(x_j)\right| \leq \varepsilon \text{ pour } j = 1, \dots, n\right\}$$
$$(x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0)$$

forment une base de voisinage de f, et chacun d'entre eux contient une fonction continue.

On peut cependant généraliser la notion de suite dans un espace topologique quelconque. La notion de filtre en est une vision, ici nous parlerons de filet (*net* en anglais). Pour cela on considère un **ensemble partiellement ordonné**, i.e. la donnée d'un ensemble $\mathcal{A}$ muni d'une relation binaire $\preceq$ tel que (i) $\alpha \preceq \alpha$ pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$; (ii) si $\alpha \preceq \beta$ et $\beta \preceq \gamma$ alors $\alpha \preceq \gamma$ et (iii) pour tout $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ il existe $\gamma \in \mathcal{A}$ tel que $\alpha \preceq \gamma$ et $\beta \preceq \gamma$.

Définition $\mathbb{I}$.32.
Un *filet* dans un ensemble X est une application $\alpha \mapsto x_\alpha$ d'un ensemble partiellement ordonné $\mathcal{A}$ dans X.

Exemples $\mathbb{I}$.33. Voici quelques exemples d'ensembles partiellement ordonnés

1. L'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ avec $i \preceq j$ si, et seulement si $i \leq j$. Dans ce cas le filet est simplement une suite.
2. L'ensemble $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ ($a \in \mathbb{R}$), avec $x \preceq y$ si, et seulement si, $|x - a| \geq |y - a|$.
3. L'ensemble des partitions $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ de l'intervalle $[a, b]$, avec
$$(a = x_0 < \cdots < x_n = b) \preceq (a = y_0 < \cdots < y_m = b)$$
si, et seulement si $\max(x_j - x_{j-1}) \geq \max(y_k - y_{k-1})$.
4. L'ensemble des voisinages d'un point x dans un espace topologique X, avec $U \preceq V \Leftrightarrow U \supset V$.

Plaçons nous dans un espace topologique X, et donnons-nous un filet $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, on dira que le **filet converge** vers un point x, si pour tout voisinage $U \in \mathcal{V}(x)$, il existe $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ tel que $x_\alpha \in U$ pour tout $\alpha_0 \preceq \alpha$ (on dira «pour α suffisamment grand»). De même on dira d'un point qu'il est un **point d'accumulation du filet** si pour tout voisinage U de x, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$ il existe $\beta \succeq \alpha$ tel que $x_\beta \in U$. Définissons maintenant ce qu'est un sous-filet :

Définition $\mathbb{I}$**.34.**
Un sous-filet d'un filet $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ est la donnée d'un filet $(y_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}}$ et d'une application $\beta \mapsto \alpha_\beta$ de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{A}$ tels que (i) pour tout $\alpha_0 \in \mathcal{A}$ il existe $\beta_0 \in \mathcal{B}$ tel que si $\beta \succeq \beta_0$ alors $\alpha_\beta \succeq \alpha_0$, et (ii) $y_\beta = x_{\alpha_\beta}$

Remarque $\mathbb{I}$**.35.** Un sous-filet d'une suite n'est pas forcément une sous-suite, même si l'ensemble partiellement ordonnée pour le sous-filet est $\mathbb{N}$ (on peut s'arrêter sur un élément de la suite).

Nous sommes maintenant en mesure de généraliser aux espaces topologiques quelconques la caractérisation des espaces fermés, de la continuité, de la compacité dans le cas métrique en remplaçant suite par filet et sous-suite par sous-filet (cf. Folland [Fol84] chapitre 4 par exemple).

II.1.b Topologie de Gromov-Haussdorff mesurée

Pour mener à bien nos démonstrations, nous allons avoir besoin de la convergence de Gromov-Haussdorff, que nous allons aborder suivant le point de vue de Fukaya [Fuk90] :

Notons $\mathcal{MET}$ l'ensemble des classes d'isométries d'espaces métriques compacts. Soient X et Y deux éléments de $\mathcal{MET}$ alors une application $\phi : X \to Y$ est appelée une ϵ-**approximation de Hausdorff** si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

1. Le ϵ-voisinage de $\phi(X)$ dans Y est Y.
2. Pour tout $x, y \in X$ on a

$$\Big| d(x,y) - d\big(\phi(x),\phi(y)\big) \Big| < \epsilon.$$

Nous aurons besoin par la suite d'une version plus précise de la convergence de Gromov-Hausdorff, adaptée aux espaces mesurés. Nous demanderons ainsi à ceux-ci, non seulement de converger au sens de Gromov-Hausdorff usuel, mais aussi d'entraîner les mesures avec eux, en les faisant converger vaguement, c'est ce qui est dit dans la définition qui suit.

Notons $\mathcal{M}$ l'ensemble des couples (X, m) où (X) est dans $\mathcal{MET}$ et m est une mesure de Radon sur X. On notera $C^0(\Omega)$ les fonctions continues à valeurs dans $\mathbb{R}$ sur un ensemble Ω. Enfin $\mathcal{A}$ est un ensemble partiellement ordonné (« directed ») alors

Définition I.36 (Topologie de G-H mesurée).
On dira qu'un filet d'espaces dans $\mathcal{M}$, $\{X_\alpha, m_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}}$ converge vers (X, m) au sens de la convergence de G-H mesurée si, et seulement s'il existe un filet de nombres positifs, décroissant vers 0, noté ε_α, et des ε_α-approximations, m_α-mesurables $f_\alpha : X_\alpha \to X$ tels que

$$\int_{X_\alpha} u \circ f_\alpha \, dm_\alpha \longrightarrow \int_X u \, dm \quad \forall u \in C^0(X) \tag{I-16}$$

c'est-à-dire

$$(f_\alpha)_*(m_\alpha) \overset{\text{vaguement}}{\longrightarrow} m$$

II.2 Convergences des filets d'opérateurs bornés

Dans cette partie nous allons adapter les notions usuelles de convergence dans un espace de Hilbert à notre problématique, ce qui nous permettra d'adapter les notions de convergence d'opérateurs bornés sur un espace de Hilbert.

II.2.a Topologies sur un filet d'espaces de Hilbert

Pour ce qui suit on se donne un filet $(X_\alpha, m_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ d'espaces dans $\mathcal{M}$, que l'on suppose converger pour la topologie de G-H mesurée vers (X_∞, m_∞). Nous nous intéresserons spécialement à $L^2(X_\alpha, m_\alpha) = L^2_\alpha$ (resp. $L^2(X_\infty, m_\infty) = L^2_\infty$) i.e. l'ensemble des fonctions à valeurs réelles, dont le carré est intégrable, on notera $\langle\cdot,\cdot\rangle_\alpha$ (resp. $\langle\cdot,\cdot\rangle_\infty$) leur produit scalaire respectif et $\|\cdot\|_\alpha$ (resp. $\|\cdot\|_\infty$)) leur norme respective. À présent nous allons donner un sens au fait qu'un filet d'éléments $u_\alpha \in L^2_\alpha$ converge vers un élément $u_\infty \in L^2_\infty$ fortement. On supposera dans tout ce qui suit que les fonctions continues sont denses dans chaque espace L^2_α (resp. L^2_∞).

Définition I.37 (Topologie forte sur $\mathfrak{L}^2$).
On dira d'un filet $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ avec $u_\alpha \in L^2_\alpha$ qu'il converge fortement vers un vecteur $u \in L^2_\infty$ s'il existe un filet $(v_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}} \subset C^0(X_\infty)$ qui tend vers u dans L^2_∞ et tel que

$$\lim_\beta \limsup_\alpha \|v_\beta \circ f_\alpha - u_\alpha\|_\alpha = 0$$

((f_α) est le filet des ε_α-approximations). La topologie induite par cette forme de convergence sur $\mathfrak{L}^2 = \bigsqcup_{\alpha\in\mathcal{A}} L^2_\alpha$ est appelée *topologie forte*.

Nous allons voir que cette convergence est une bonne convergence, dans la mesure où elle vérifie un certain nombre de propriétés que l'on est en droit d'exiger d'elle :

Propriétés I.38.
Soit $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ et $(v_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ deux filets de vecteurs de $\mathfrak{L}^2$ avec $u_\alpha, v_\alpha \in L^2_\alpha$ et $u, v \in L^2_\infty$ alors

1. *$u_\alpha \longrightarrow 0 \in L^2_\infty$ dans $\mathfrak{L}^2$ si et seulement si $\|u_\alpha\|_\alpha \to 0$.*
2. *Si $u_\alpha \longrightarrow u$ dans $\mathfrak{L}^2$, alors $\|u_\alpha\|_\alpha \to \|u\|_\infty$.*
3. *Si $u_\alpha \longrightarrow u$ et $v_\alpha \longrightarrow v$ dans $\mathfrak{L}^2$ alors $\lambda u_\alpha + \mu v_\alpha \longrightarrow \lambda u + \mu v$ dans $\mathfrak{L}^2$ pour tout λ et μ dans $\mathbb{R}$.*
4. *Si $u_\alpha \longrightarrow u$ et $v_\alpha \longrightarrow v$ dans $\mathfrak{L}^2$, alors $(u_\alpha, v_\alpha)_\alpha \to (u, v)_\infty$.*
5. *Si $\|u_\alpha - v_\alpha\|_\alpha \to 0$ et $u_\alpha \longrightarrow u$ dans $\mathfrak{L}^2$ alors $v_\alpha \longrightarrow u$ dans $\mathfrak{L}^2$.*
6. *Si $u_\alpha \longrightarrow u$ et $v_\alpha \longrightarrow u$ dans $\mathfrak{L}^2$ alors $\|u_\alpha - v_\alpha\|_\alpha \to 0$.*
7. *Pour tout $w \in L^2_\infty$ il existe un filet $(w_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ avec $w_\alpha \in L^2_\alpha$ qui converge vers w dans $\mathfrak{L}^2$.*

Puisque nous avons une convergence forte, il est logique d'introduire une convergence faible. Pour cela nous allons généraliser une propriété de la convergence faible usuelle sur un espace de Hilbert.

Définition $\mathbb{I}$.39 (Topologie faible sur $\mathfrak{L}^2$).
On dira qu'un filet $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, converge faiblement vers un vecteur $u \in L^2_\infty$ si

$$\lim_\alpha (u_\alpha, v_\alpha)_\alpha = (u, v)_\infty \qquad (\mathbb{I}\text{-}17)$$

pour tout filet $(v_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, $v_\alpha \in L^2_\alpha$ convergeant fortement vers $v \in L^2_\infty$ dans $\mathfrak{L}^2$. Cette convergence induit une topologie sur $\mathfrak{L}^2$ dite *topologie faible*

Nous allons voir que c'est bien la bonne manière de voir. Commençons par une propriété importante : la compacité faible des bornés (cf. [KS] lemme 2.2) :

Propriété $\mathbb{I}$.40.
Soit $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, $u_\alpha \in L^2_\alpha$ un filet alors, si $\|u_\alpha\|_\alpha$ est uniformément borné pour $\alpha \in \mathcal{A}$, il existe un sous-filet faiblement convergent.

Preuve. Soit $(\phi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une base orthonormale de L^2_∞. Par densité des fonctions continues dans L^2_∞, pour tout k il existe un filet de fonctions continues $(\varphi_{k,\beta})_{\beta\in\mathcal{B}}$ telles que $\lim_\beta \varphi_{k,\beta} = \phi_k$ dans L^2_∞. Quitte à passer à des sous-filets de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ on suppose que (on note $f_\alpha^*\psi = \psi \circ f_\alpha$),

$$\lim_\beta \lim_\alpha \langle u_\alpha,\, f_\alpha^* \varphi_{1,\beta}\rangle_\alpha = a_1 \in \overline{\mathbb{R}}$$

suivant l'hypothèse de borne uniforme, $a_1 \in \mathbb{R}$. En répétant ce procédé, on peut supposer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $a_k \in \mathbb{R}$ telle que

$$\lim_\beta \lim_\alpha \langle u_\alpha,\, f_\alpha^* \varphi_{k,\beta}\rangle_\alpha = a_k.$$

Fixons un entier N. Pour tout $\epsilon > 0$ il existe un $\beta_\epsilon \in \mathcal{B}$ tel que pour tout $\beta \succeq \beta_\epsilon$

$$\left|\langle \varphi_{k,\beta}, \varphi_{l,\beta}\rangle_\infty - \delta_{kl}\right| < \epsilon$$

pour $k, l = 1, \dots, N$. De plus, pour tout $\beta \succeq \beta_\epsilon$, il existe $\alpha_{\epsilon,\beta} \in \mathcal{A}$ tel que,

$$\left|\langle f_\alpha^* \varphi_{k,\beta},\ f_\alpha^* \varphi_{l,\beta}\rangle_\alpha - \delta_{kl}\right| < 2\epsilon,$$

pour tout $k, l = 1, \dots, N$ et $\alpha \succeq \alpha_{\epsilon,\beta}$. Soit $L_{\alpha,\beta} = \mathrm{Vect}\{ f_\alpha^* \varphi_{k,\beta} \mid k = 1, \dots, N\}$, et $P_{\alpha,\beta} : L^2_\alpha \to L_{\alpha,\beta}$ la projection sur l'espace linéaire $L_{\alpha,\beta} \subset L^2_\alpha$ on a alors :

$$\left| \sum_{k=1}^{N} \left|\langle u_\alpha, \varphi_{k,\beta} \circ f_\alpha\rangle_\alpha\right|^2 - \| P_{\alpha,\beta} u_\alpha \|_\alpha^2 \right| \leq \theta_N(\epsilon)$$

pour tout $\alpha \succeq \alpha_{\epsilon,\beta}$ et $\beta \succeq \beta_\epsilon$, avec θ_N une fonction ne dépendant que de N telle que $\lim_{\epsilon\to 0} \theta_N(\epsilon) = 0$. On en déduit que pour tout N

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} |a_k|^2 &= \lim_\beta \lim_\alpha \sum_{k=1}^{N} \left|\langle u_\alpha,\ f_\alpha^* \varphi_{k,\beta}\rangle_\alpha\right|^2 = \lim_\beta \lim_\alpha \| P_{\alpha,\beta} u_\alpha \|_\alpha^2 \\ &\leq \limsup_\alpha \| u_\alpha \|_\alpha^2 < \infty \end{aligned}$$

en sorte que

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k \in L^2_\infty.$$

On va démontrer qu'un sous-filet de $(u_\alpha)_\alpha$ converge faiblement vers u. Considérons $v \in L^2_\infty$ et posons $b_k = \langle v, \phi_k\rangle_\infty$. Suivant la propriété $\mathbb{I}$.38, dans notre cas il suffit de montrer que ($\mathbb{I}$-17) est vérifié pour un filet $(v_\alpha)_\alpha$ bien choisi. Soit $v_\beta^N = \sum_{k=1}^{N} b_k \varphi_{k,\beta}$. Ainsi définie $v_\beta^N \in C^0$ et $\lim_{N\to\infty} \lim_\beta v_\beta^N = v$ fortement. On obtient

$$\lim_\beta \lim_\alpha \langle u_\alpha,\ f_\alpha^* v_\beta^N\rangle_\alpha = \lim_\beta \lim_\alpha \sum_{k=1}^{N} b_k \langle u_\alpha,\ f_\alpha^* \varphi_{k,\beta}\rangle_\alpha = \sum_{k=1}^{N} a_k b_k$$

qui tend vers $\langle u, v\rangle_\infty$ avec $N \to \infty$. Il existe donc un filet de nombres entiers $(N_\beta)_\beta$ tendant vers ∞ tel que $v_\beta^{N_\beta}$ converge fortement vers v et

$$\lim_\beta \lim_\alpha \langle u_\alpha,\ f_\alpha^* v_\beta^{N_\beta}\rangle_\alpha = \langle u, v\rangle_\infty.$$

❑

La propriété suivante donne des informations sur le filet des normes d'un filet faiblement convergent.

Propriétés $\mathbb{I}$.41.
Si le filet $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ converge faiblement vers un vecteur $u \in L^2_\infty$. Alors

$$\sup_\alpha \|u_\alpha\|_\alpha < \infty \quad \textit{et} \quad \|u\|_\infty \leq \liminf_\alpha \|u_\alpha\|_\alpha$$

de plus, $u_\alpha \longrightarrow u$ si et seulement si

$$\|u\|_\infty = \lim_\alpha \|u_\alpha\|_\alpha$$

Preuve. On procède par l'absurde. On considère un filet (u_α) faiblement convergent tel que $\sup_\alpha \|u_\alpha\|_\alpha = +\infty$. Alors on peut en extraire une suite telle que $\|u_{\alpha_k}\|_{\alpha_k} > k$; posons

$$v_k = \frac{1}{k}\frac{u_{\alpha_k}}{\|u_{\alpha_k}\|_{\alpha_k}}$$

alors $\|v_k\|_{\alpha_k} \to 0$ donc v_k converge fortement vers 0, en sorte que

$$\langle u_{\alpha_k}, v_k\rangle_{\alpha_k} \to \langle u, 0\rangle_\infty = 0,$$

mais on a aussi

$$\langle u_{\alpha_k}, v_k\rangle_{\alpha_k} > 1,$$

ce qui est absurde.

Pour l'autre inégalité on prend un filet $(w_\alpha)_\alpha$ convergeant fortement vers u (il y en a un d'après $\mathbb{I}$.38), alors

$$\begin{aligned} 0 &\leq \liminf_\alpha \|u_\alpha - w_\alpha\|_\alpha^2 \\ &= \liminf_\alpha \big(\|u_\alpha\|_\alpha^2 + \|w_\alpha\|_\alpha^2 - 2\langle u_\alpha, w_\alpha\rangle_\alpha\big) \\ &= \liminf_\alpha \|u_\alpha\|_\alpha^2 - \|u\|_\infty^2 \end{aligned}$$

l'assertion finale provient de l'égalité suivante

$$\|u_\alpha - w_\alpha\|_\alpha^2 = \|u_\alpha\|_\alpha^2 + \|w_\alpha\|_\alpha^2 - 2\langle u_\alpha, w_\alpha\rangle_\alpha.$$

et de $\mathbb{I}$.38. ❑

La propriété suivante caractérise la convergence forte à l'aide de la convergence faible.

Propriété $\mathbb{I}$.42.
Soit $u \in H$ alors $u_\alpha \longrightarrow u$ fortement si, et seulement si, $\langle u_\alpha, v_\alpha\rangle_\alpha \longrightarrow \langle u, v\rangle_\infty$ pour tout filet $(v_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, $v_\alpha \in L^2_\alpha$ convergeant faiblement vers $v \in L^2_\infty$.

Preuve. Suivant la définition $\mathbb{I}$.39 la condition est de manière évidente nécessaire. Réciproquement pour tout (v_α) convergeant fortement (donc faiblement) vers v on a

$$\langle u_\alpha, v_\alpha\rangle_\alpha \underset{\alpha\to+\infty}{\longrightarrow} \langle u, v\rangle_\infty$$

en sorte que le filet (u_α) converge faiblement. Introduisons-le dans l'hypothèse, cela nous donne la convergence du filet $\|u_\alpha\|_\alpha^2$ vers $\|u\|_\infty^2$, on conclut en utilisant la propriété $\mathbb{I}$.41 ❑

Remarque $\mathbb{I}$.43. Si pour tout α, $L^2_\alpha = L^2_\infty$ on obtient les convergences usuelles.

II.2.b Convergence des opérateurs bornés

Notons $\mathcal{L}(L^2_\infty)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés sur L^2_∞, et $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_\infty}$ leur norme. Soit $B_\infty \in \mathcal{L}(L^2_\infty)$ et $B_\alpha \in \mathcal{L}(L^2_\alpha)$ pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$.

Théorème et définition I.44.
Soit u, $v \in L^2_\infty$ et $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, $(v_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ deux filets de vecteurs, u_α, $v_\alpha \in L^2_\alpha$ alors on dit que $(B_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ converge fortement (resp. faiblement, compactement) vers B si $B_\alpha u_\alpha \longrightarrow Bu$ fortement (resp. faiblement, fortement) pour tout (u_α) convergeant fortement (resp. faiblement, faiblement) vers u $\Leftrightarrow$

$$\lim_\alpha \langle B_\alpha u_\alpha, v_\alpha\rangle_\alpha = \langle Bu, v\rangle_\infty \tag{I-18}$$

pour tout (u_α), (v_α), u et v tels que $u_\alpha \longrightarrow u$ fortement (resp. faiblement, faiblement) et $v_\alpha \longrightarrow v$ faiblement (resp. fortement, faiblement)

Preuve. L'équivalence provient de la propriété I.42 et de la définition I.39 ❑

Remarque I.45. Ainsi définie la convergence forte des opérateurs est équivalente à la convergence faible de leurs adjoints, en sorte que des opérateurs convergent compactement si, et seulement si, leurs adjoints convergent compactement. Enfin pour les opérateurs auto-adjoints les deux premières notions sont équivalentes.

On note B^* l'adjoint de B.

Propriété I.46.
Si le filet (B_α) converge compactement vers B alors B et B^* sont des opérateurs compacts.

Preuve. Supposons que le filet converge compactement. Soit $(v_\beta)_{\beta\in\mathcal{B}}$ un filet convergeant faiblement vers v dans L^2_∞. Alors

$$\langle u, Bv_\beta\rangle_\infty = \langle B^*u, v_\beta\rangle_\infty \longrightarrow \langle B^*u, v\rangle_\infty = \langle u, Bv\rangle_\infty$$

ce qui traduit la convergence faible de Bv_β vers Bv. Pour tout β notons $(u_{\alpha,\beta})$ un filet tel que $\lim_\alpha u_{\alpha,\beta} = v_\beta$ fortement. Par convergence compacte des B_α on a la convergence forte de $B_\alpha u_{\alpha,\beta}$ vers Bv_β, ceci pour tout β. Soit un filet de réels positifs $(\epsilon(\beta))_\beta$ tel que $\lim_\beta \epsilon(\beta) = 0$. Alors il existe $\alpha(\beta)$ telle que, pour tout $\alpha \succeq \alpha(\beta)$,

$$\Big|\|B_\alpha u_{\alpha,\beta}\|_\alpha - \|Bv_\beta\|_\infty\Big| \leq \epsilon(\beta).$$

Si on note $w_\beta = u_{\alpha(\beta),\beta}$, alors

$$\lim_\beta w_\beta = v \text{ faiblement}$$

et donc la convergence compacte implique la convergence forte du filet $B_{\alpha(\beta)}w_\beta$ vers Bv, or par construction,

$$\lim_\beta \Big|\|B_{\alpha(\beta)}w_\beta\|_{\alpha(\beta)} - \|Bv_\beta\|_\infty\Big| = 0.$$

on en déduit donc que $\|Bv_\beta\|_\infty \to \|Bv\|_\infty$. On conclut grâce à la propriété I.41.
❑

En ce qui concerne les normes des opérateurs on peut énoncer ce qui suit,

Propriété $\mathbb{I}$.47.
Si $B_\alpha \longrightarrow B$ fortement alors

$$\liminf_\alpha \|B_\alpha\|_{\mathcal{L}_\alpha} \geq \|B\|_{\mathcal{L}_\infty}$$

si de plus la convergence est compacte il y a égalité.

Preuve. Soit $\epsilon > 0$, il existe donc $u \in L^2_\infty$ normé tel que $\|Bu\|_\infty > \|B\|_{\mathcal{L}_\infty} - \epsilon$. On prend maintenant un filet (u_α) convergeant fortement vers u. Alors $\|u_\alpha\|_\alpha \to 1$, de plus par convergence forte des (B_α), on a $\|B_\alpha u_\alpha\|_\alpha \to \|Bu\|_\infty$, en sorte que

$$\liminf_\alpha \|B_\alpha\|_{\mathcal{L}_\alpha} \geq \liminf_\alpha \frac{\|B_\alpha u_\alpha\|_\alpha}{\|u_\alpha\|_\alpha} = \left\|Bu\right\|_\infty > \|B\|_{\mathcal{L}_\infty} - \epsilon$$

Supposons que le filet converge compactement et montrons l'inégalité inverse. On prend un filet (u_α) de vecteurs normés tel que,

$$\lim_\alpha \left| \|B_\alpha\|_{\mathcal{L}_\alpha} - \|B_\alpha u_\alpha\|_\alpha \right| = 0.$$

Quitte à prendre un sous-filet, on peut supposer que (u_α) converge faiblement vers u. En tenant compte de $\mathbb{I}$.41, on a $\|u\|_\infty \leq 1$. De plus la convergence compacte implique la convergence forte de $B_\alpha u_\alpha$ vers Bu, on obtient alors,

$$\|B\|_{\mathcal{L}_\infty} \geq \frac{\|Bu\|_\infty}{\|u\|_\infty} \geq \|Bu\|_\infty = \lim_\alpha \|B_\alpha u_\alpha\|_\alpha = \lim_\alpha \|B_\alpha\|_{\mathcal{L}_\alpha}.$$

❏

Deuxième chapitre

Spectres asymptotiques des nilvariétés graduées

Introduction

Depuis M. Gromov [Gro81] nous savons que les seuls groupes à croissance polynomiale sont ceux possédant un sous-groupe nilpotent d'indice fini. Il est donc normal, du point de vue riemannien, de s'intéresser aux nilvariétés, les quotients compacts de groupe de Lie dont l'algèbre de Lie est nilpotente. C'est dans ce cadre que se situe le travail de P. Pansu [Pan82] qui a étudié le volume des grandes boules sur le revêtement universel des nilvariétés munies d'une métrique riemannienne. Cette étude faisait apparaître une famille de métriques non-riemanniennes, dites de Carnot-Carathéodory, que l'on appelle aussi aujourd'hui sous-riemanniennes. Leur étude s'est beaucoup développée et on les trouve au centre d'un certain nombre de théories, citons entre autres la théorie du contrôle, la physique non holonôme et la géométrie sous-riemannienne. C'est dans ce cadre que se place ce chapitre. En effet, si du point de vu macroscopique les métriques riemanniennes se comportent comme des métriques sous-riemanniennes invariantes à gauche, qu'en est-il du laplacien sur les grandes boules ? Le cas invariant à gauche nous en donne une idée. Celui-ci tend à se comporter comme un opérateur hypoelliptique, que l'on appelle laplacien de Kohn. Il est associé à la métrique de Carnot-Carathéodory apparaissant dans l'étude macroscopique.

Cependant dans le cas général les comportements sont bien plus complexes. Aussi nous sommes-nous placé dans un cadre sous-riemannien, qui nous semble adapté à l'étude macroscopique des nilvariétés. Dans ce cadre, le seul laplacien usuellement étudié est le laplacien de Kohn. Ce cas est très restrictifs puisqu'il ne concerne que les métriques sous-riemanniennes invariantes à gauche, il est donc naturel de demander s'il existe un laplacien adapté dans le cas non invariant à gauche. Dans un premier temps nous introduisons donc une famille de laplaciens sous-riemanniens (cf. I.1.d), qui coïncide avec le Laplacien de Kohn dans le cas invariant à gauche, et qui partage certaines de ses propriétés, notamment l'hypoellipticité. Dans un second temps nous étudierons le spectre de ces laplaciens sous-riemanniens sur les boules de grand rayon. Nous montrerons que celui-ci se comporte asymptotiquement comme le spectre d'un laplacien de Kohn, pour une métrique invariante à gauche, généralement différente de la distance obtenue par P. Pansu [Pan82]. Pour y parvenir nous utiliserons certaines notions de convergence des opérateurs, introduites en I.II.

I Géométrie sous-riemanniennes des nilvariétés graduées

I.1 Définitions des objets étudiés

I.1.a — On s'intéresse aux algèbres de Lie nilpotentes $\mathfrak{u}$ qui possèdent une graduation, c'est-à-dire une décomposition de la forme suivante :

$$\mathfrak{u} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r,$$

telle que

1. V_i est un supplémentaire de $\mathfrak{u}^{i+1}$ dans $\mathfrak{u}^i$;
2. $[V_i, V_j] \subset V_{i+j}$;

où l'on a posé

$$\mathfrak{u}^1 = \mathfrak{u}, \qquad \mathfrak{u}^{i+1} = [\mathfrak{u}^i, \mathfrak{u}]. \tag{III-1}$$

Les algèbres de Lie nilpotentes d'ordre 2 sont toutes graduées. Il existe cependant des algèbres de Lie nilpotente non graduées dès la dimension 6.

À toute graduation (V_i) est attaché un groupe à un paramètre d'automorphismes :

$$\delta_\rho : \delta_\rho(x) = \rho^i x \text{ si } x \in V_i\,.$$

appelées dilatations. L'existence d'une telle dilatation est en fait équivalente à l'existence d'une graduation, et c'est la principal vertue des algèbres graduées.

Nous allons à présent nous restreindre aux quotients compacts des groupes de Lie simplement connexes dont l'algèbre de Lie est nilpotente. C'est ce que l'on appelle les nilvariétés. Si l'algèbre de Lie est de plus graduée nous parlerons de nilvariété graduée (le groupe de Lie simplement connexe est parfois appelé, dans ce cas, *groupe de Carnot*).

I.1.b — Soit M^n une nilvariété graduée, i.e. $M^n = \Gamma \setminus G$ où G est un groupe de Lie simplement connexe, dont l'algèbre de Lie est nilpotente et graduée, et Γ un sous-groupe co-compact de G. La graduation induit une distribution $\mathcal{H}$, en transportant par translation à gauche l'espace V_1 à l'origine. On suppose M^n muni d'une métrique sous-riemannienne g sur $\mathcal{H}$. i.e. la donnée d'un produit scalaire en chaque point x de M^n sur $\mathcal{H}_x$.

En raison de l'hypothèse de graduation, une base de V_1 vérifie les conditions d'Hörmander, en sorte que cette métrique détermine une distance d_g sur

M^n, dite distance sous-riemannienne ou distance de Carnot-Carathéodory. On relève tous ces éléments sur le revêtement universel G où l'on obtient donc une métrique $\tilde{g}$ invariante par l'action à gauche du sous-groupe cocompact Γ (mais par forcément par G),on dira que $\tilde{g}$ est périodique. On notera D_Γ un domaine fondamental pour l'action de Γ à gauche.

Nous appellerons métriques ré-échelonnées la famille de métriques $g_\rho = \frac{1}{\rho^2}(\delta_\rho)^*\tilde{g}$, pour $\rho > 0$.

I.1.c — Donnons nous une base $X_1, \ldots, X_{d_1}$ de V_1, elle induit une famille de champs de vecteurs dans $\mathcal{H}$, qui en tous points détermine une base du transporté de V_1. En prenant les crochets successifs on obtient des bases des V_i. En prenant les formes duales, nous obtenons une forme volume dX sur la variété. Celle-ci étant invariante à gauche par G, son intégration nous donne une mesure de Haar.

Soit une métrique h sur $\mathcal{H}$ et notons $(h_{ij}(x))$ la matrice de la métrique sous-riemannienne dans la base $(X_1, \ldots, X_{d_1})$ au point x. On note $d_i = \dim(V_i)$. La **dimension homogène** de la variété est le nombre $d = \sum_i^r i d_i$.

Définition $\mathbb{III}$.1 (Volume sous-riemannien).
Nous définissons le volume sous-riemannien comme étant la mesure de Haussdorff d-dimensionnelle μ_h induite par la distance sous-riemannienne. On notera $F(h,x)$ la densité de la mesure, qui dépend de la métrique et des coordonnées, telle que

$$\mu_h(A) = \int_A F(h,x)dx$$

Exemple $\mathbb{III}$.2. Dans le cas des tores, $F(h,x)\ dx = \det(h_{ij})^{1/2}(x)\ dx$ i.e. la forme volume usuelle associée à la métrique riemannienne. Pour le premier groupe de Heisenberg, i.e. $\mathbb{R}^3$ muni de la multiplication $(\chi,\eta,\zeta) * (\chi',\eta',\zeta') = (\chi+\chi', \eta+\eta', \zeta+\zeta'+\chi\eta')$, on prend $\mathcal{H}_x = \mathrm{Vect}\{\partial_\chi, \partial_\eta + \chi\partial_\eta\}$ et, soit h une métrique sur $\mathcal{H}$, on a $F(h,x)\ dx = \det(h_{ij})\ d\chi d\eta d\zeta$

Remarque $\mathbb{III}$.3. On pourra aussi étudier le cas où l'on se donne une mesure à partir d'une densité F définissant une forme volume ne dépendant pas du système de coordonnée à automorphisme près, i.e., soit ϕ un isomorphisme du groupe de Lie qui envoie les coordonnées x sur y, on demande que l'égalité suivante soit vérifiée :

$$F\big(h,x\big)\ dx = F\big(h,y\big)\ dy$$

Principalement ce que l'on veut, c'est que la fonction F vérifie, $F(g_\rho, x) = F(\tilde{g}, \delta_\rho x)$ (voir définition de g_ρ en I.1.b).

I.1.d — À présent on se dote d'un opérateur sous-riemannien ressemblant au laplacien, adapté à la mesure. Notons $(g_{\mathcal{H}}^{ij})$ la matrice inverse de la matrice (g_{ij}) représentant la métrique sous-riemannienne $\tilde{g}$ dans la base $(X_1, \ldots, X_n)$ et définissons le laplacien sous-riemannien associé par,

$$\Delta_{\mathcal{H}} f = -\frac{1}{F(\tilde{g}, x)} \sum_{i,j=1}^{d_1} X_i \big(F(\tilde{g}, x) g_{\mathcal{H}}^{ij} X_j f\big).$$

On rappel que, puisque les $(X_i)_{i=1,\dots,d_1}$ vérifient les conditions d'Hörmander, l'opérateur $\Delta_{\mathcal{H}}$ est hypoelliptique.

On procède de la même manière pour les métriques ré-échelonnées. On note μ_ρ la mesure associée à g_ρ et Δ_ρ le sous-laplacien. Enfin (g_ρ^{ij}) sera la matrice inverse de la matrice de g_ρ dans la base $X_1, \dots, X_{d_1}$.

I.2 Étude macroscopique des mesures

I.2.a Convergence des compacts

On rappelle que $(\delta_\rho)_{\rho \in \mathbb{R}^+}$ est une famille de dilatations associées au groupe de Lie G. On se donne une métrique sous-riemannienne invariante par l'action à gauche de Γ. On rappelle que P. Pansu dans [Pan82] montre qu'il existe une norme de groupe $\|\cdot\|_\infty$ que l'on appelle norme stable, et une distance d_∞ sur G homogène, i.e,

$$d_\infty(\delta_\rho x, \delta_\rho y) = \rho d_\infty(x, y)$$

et telle que

$$\lim_{\rho \to \infty} \frac{d_g(\delta_\rho x, \delta_\rho y)}{\rho} = d_\infty(x, y),$$

pour tout x et y dans G, avec

$$d_\infty(x, y) = \inf \left\{ \int_0^1 \|\gamma'\|_\infty \, dt \mid \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \text{ et, pour presque tout } t, \gamma' \in \mathcal{H} \right\}.$$

de sorte que, en notant D_Γ un domaine fondamental pour l'action de Γ, et pour une mesure de Haar μ sur G

$$\mu_\infty = \frac{\mu_g(D_\Gamma)}{\mu(D_\Gamma)} \mu$$

Lemme III.4.
Soit f une fonction dans $L^1(A, \mu)$, où A est un sous ensemble compact de G ayant un bord de mesure nulle pour μ, alors

$$\frac{1}{\rho^d} \int_{\delta_\rho A} f \circ \delta_{\frac{1}{\rho}}(x) \, d\mu_g(x) = \int_A f(x) \, d\mu_\rho(x) \underset{R \to +\infty}{\longrightarrow} \int_A f \, d\mu_\infty \qquad \text{(III-2)}$$

autrement dit, la suite des mesures μ_ρ converge vaguement vers μ_∞ sur A.

Preuve. Il suffit de le vérifier pour des fonctions continues :

On note $*$ la loi de groupe. Soient $z_1, \ldots, z_k$ et $\zeta_1, \ldots, \zeta_l$ des éléments de Γ tels que

$$\bigcup_i z_i * D_\Gamma \subset \delta_\rho A \subset \bigcup_j \zeta_j * D_\Gamma$$

et $\zeta_j * D_\Gamma \cap \delta_\rho A \neq \emptyset$ pour $j = 1, \ldots, l$ (on a donc encadré A par des unions de « pavés » dilatés de domaines fondamentaux), en remarquant alors que,

$$\mu_g(D_\Gamma) = \frac{\mu_g(D_\Gamma)}{\mu(D_\Gamma)} \mu(D_\Gamma) = \mu_\infty(D_\Gamma),$$

on obtient facilement les inégalités suivantes

$$\sum_i \inf_{\delta_\rho x \in z_i * D_\Gamma} f(x)\ \mu_\infty(D_\Gamma) \leq$$
$$\int_{\delta_\rho A} f\big(\delta_{\frac{1}{\rho}}(x)\big)\ d\mu_g(x) \leq \sum_j \sup_{\delta_\rho x \in (\zeta_j * D_\Gamma) \cap \delta_\rho A} f(x)\ \mu_\infty(D_\Gamma) \quad (\text{III-3})$$

On divise maintenant tous les membres par ρ^d, ce qui nous donne,

$$\sum_i \inf_{x \in \delta_{1/\rho}(z_i * D_\Gamma)} f(x)\ \mu_\infty(\delta_{1/\rho} D_\Gamma) \leq$$
$$\int_A f\ d\mu_\rho(x) \leq \sum_j \sup_{x \in \delta_{1/\rho}(\zeta_j * D_\Gamma) \cap A} f(x)\ \mu_\infty(\delta_{1/\rho} D_\Gamma) \quad (\text{III-4})$$

les termes extrêmes sont les intégrales de suites de fonctions, plus précisément (χ_E étant la fonction caractéristique de l'ensemble E),

- à gauche $f_g^\rho(x) = \sum_i \inf_{x \in \delta_{1/\rho}(z_i * D_\Gamma)} f(x)\ \chi_{\delta_{1/\rho}(z_i * D_\Gamma)}$;
- et à droite $f_d^\rho = \sum_j \sup_{x \in \delta_{1/\rho}(\zeta_j * D_\Gamma) \cap A} f(x)\ \chi_{\delta_{1/\rho}(\zeta_j * D_\Gamma) \cap A}$,

convergeant simplement vers f. Par conséquent en vertu du théorème de convergence dominée, ils convergent tous les deux vers $\int_A f\ d\mu_\infty(x)$ entraînant avec eux le terme central. ❑

Notons $d_\rho(x, y) = d_g\big(\delta_\rho(x), \delta_\rho(y)\big)/\rho$ (i.e. la distance associée à la métrique ré-échelonnée g_ρ) et résumons ce qui vient d'être fait

Théorème III.5.
Soit A un compact de G alors la suite $(A, d_\rho, \mu_\rho)_\rho$ converge au sens de Gromov-Hausdorff mesuré vers $(A, d_\infty, \mu_\infty)$.

Preuve. Il suffit de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ε-réseau fini $(x_1, \ldots, x_N)$ de (A, d_∞) et un ε-réseau fini $(y_1, \ldots, y_N)$ de (A, d_ρ), pour ρ suffisamment grand, tels que

$$\left| \frac{d_\infty(x_i, x_j)}{d_\rho(y_i, y_j)} - 1 \right| \leq \varepsilon.$$

Soit $r > 0$ un réel, et soient $(\gamma_1, \ldots, \gamma_N)$ tous les points de Γ tels que, pour $i = 1, ..., N$, $\delta_{1/r}\gamma_i \subset A$. On note $x_i = \delta_{1/r}\gamma_i$, pour $i = 1, \ldots, N$.

On remarque d'une part qu'il existe, en raison de l'invariance par l'action à gauche du groupe co-compact Γ, deux constantes α et β telles que,

$$\alpha d_\infty(x, y) \leq d_g(x, y) \leq \beta d_\infty(x, y) \tag{III-5}$$

en sorte que, pour tout point x de A, en prenant le point x_i le plus proche (correspondant au point de Γ le plus proche de $\delta_r x$) on obtient, pour une constante C donnée (le diamètre de M^n),

$$d_\infty(x, x_i) \leq \frac{1}{\alpha r} d_g(\delta_r x, \gamma_i) \leq \frac{1}{\alpha r} C$$

et, en réinjectant cela dans III-5, on obtient,

$$d_\rho(x, x_i) \leq \frac{\beta}{\alpha r} C.$$

Ainsi, pour r suffisamment grand, $(x_1, \ldots, x_N)$ est un ε-réseau de (A, d_∞) et des (A, d_ρ). Fixons un tel r, alors pour ρ suffisamment grand, les résultats de P. Pansu [Pan82] donnent, pour tout i,

$$\left| \frac{d_\infty(x_i, x_j)}{d_\rho(x_i, x_j)} - 1 \right| \leq \varepsilon.$$

Ceci nous permet de conclure quant à la convergence au sens de Gromov-Haussdorff de la suite (A, d_R) vers (A, d_∞). Le lemme III.4 nous donne la convergence de l'intégrale des fonctions de la définition (I.36). ❑

I.2.b Le cas des boules sous-riemanniennes

Concentrons nous sur les boules sous-riemanniennes. On notera

$$B_\infty(\rho) = \{x \in G \mid d_\infty(e, x) \leq \rho\}$$

et

$$B_g(\rho) = \{x \in G \mid d_g(e, x) \leq \rho\}.$$

Théorème III.6.
Le filet $\left(\delta_{1/\rho} B_g(\rho), d_\rho, \mu_\rho\right)$ converge vers $\left(B_\infty(1), d_\infty, \mu_\infty\right)$ au sens de Gromov-Haussdorff mesuré.

Preuve. Cela provient du fait que $\delta_{1/\rho} B_g(\rho)$ est la boule unité pour d_ρ. Ainsi si $d_\infty(0, x) < 1$ pour ρ suffisamment grand $d_\rho(0, x) \leq 1$ et donc $x \in \delta_{1/\rho} B_g(\rho)$. De sorte que le raisonnement fait pour le lemme III.5 est encore valable, à condition de prendre ρ suffisamment grand pour que les éléments du ε-réseau soient bien dans $\delta_{1/\rho} B_g(\rho)$. La partie convergence vague des mesures provient de la convergence simple de $d_\rho(0, x)$ vers $d_\infty(0, x)$ sur $B_\infty(1) \setminus \partial B_\infty(1)$. ❑

En prenant la fonction constamment égale à 1 on obtient

Corollaire $\mathbb{III}$.6.bis
On a la convergence et la limite suivante

$$\lim_{\rho \to +\infty} \frac{\mu_g\big(B_g(\rho)\big)}{\rho^d} = \mu_\infty\big(B_\infty(1)\big)$$

que l'on appellera volume asymptotique sous-riemannien.

Remarque $\mathbb{III}$.7. On remarquera que les théorèmes $\mathbb{III}$.5 et $\mathbb{III}$.6 sont essentiellement dû au fait que la métrique $\tilde{g}$ étudiée est invariante par l'action à gauche d'un sous-groupe Γ de G co-compact. Il faut noter qu'ils sont encore valide si l'on prend une metrique riemannienne sur M^n et qu'on la relève sur G. Dans les deux cas les questions qui nous préoccupent sont :

- Peut-on caractériser les métriques (sous-)riemanniennes invariantes à gauche par G grace au volume asymptotique (sous-)riemannien ?
- Que peut-on dire sur le comportement du spectre de Dirichlet du laplacien (sous-)riemannien sur les boules $B_g(\rho)$ quand $\rho \longrightarrow +\infty$?

dans les parties qui suivent on va répondre à la seconde question.

II Structures spectrales

II.1 Problème étudié

Dans la partie précédente nous avons introduit au paragraphe I.1.d une famille de laplaciens sous-riemanniens (Δ_ρ). L'intérêt de ces opérateurs réside principalement dans la propriété suivante :

Propriété III.8.
Soit $f : G \to \mathbb{R}$ une fonction, en notant $f_\rho(x) = f\big(\delta_\rho(x)\big)$ on a l'égalité suivante sur G :

$$\big(\Delta_\rho f_\rho\big)(x) = \rho^2\big(\Delta_{\mathcal{H}} f\big)_\rho(x)$$

en sorte que les valeurs propres de Δ_ρ sur le domaine D sont exactement les valeurs propres de $\Delta_{\mathcal{H}}$ sur $\delta_\rho D$ multipliées par ρ^2.

Preuve. Cela provient du fait que pour $X_i \in V_1$ on a

$$X_i \cdot f_\rho(x) = \rho(X_i \cdot f)(\delta_\rho x) = \rho(X_i \cdot f)_\rho(x). \tag{III-6}$$

Puisque par construction

$$F\big(g_\rho, x\big) g_\rho^{ij}(X_i \cdot f)_\rho = \big(F(g,x) g_{\mathcal{H}}^{ij} X_i \cdot f\big)_\rho$$

(en effet on a $F(g, \delta_\rho x) = F(g_\rho, x)$) il vient

$$X_j \cdot \big(F(g,x) g_{\mathcal{H}}^{ij} X_i \cdot f\big)_\rho(x) = \rho\Big(X_j \cdot \big(F(g,x) g_{\mathcal{H}}^{ij} X_i \cdot f\big)\Big)_\rho(x) \tag{III-7}$$

En combinant les égalités (III-6) et (III-7) il n'est pas difficile de conclure. L'assertion finale est évidente. ❑

Au lieu d'étudier le laplacien $\Delta_{\mathcal{H}}$ sur les domaines $\delta_\rho D$ (resp. $B_g(\rho)$), on peut se ramener à l'étude des laplaciens Δ_ρ sur D (resp. $\delta_{1/\rho} B_g(\rho)$), en sorte que l'on se ramène à l'étude d'une suite d'opérateurs agissant sur $L^2(D, \mu_\rho)$ — resp.$L^2(\delta_{1/\rho} B_g(\rho), \mu_\rho)$. Comme on l'a vu en III.5 (resp. III.6), les espaces (D, d_ρ, μ_ρ) (resp. $(\delta_{1/\rho} B_g(\rho), d_\rho, \mu_\rho)$) convergent au sens de Gromov-Haussdorff mesuré. On peut donc se placer dans la situation de II.2 et se demander quel type de convergence doivent vérifier les opérateurs sur $L^2(D, \mu_\rho)$ (resp. $L^2(\delta_{1/\rho} B_g(\rho), \mu_\rho)$) pour entraîner avec eux leur spectre. Le but des prochains paragraphes est de donner une réponse adaptée à notre problématique.

II.2 Convergence des structures spectrales

II.2.a — Dans ce paragraphe on considère L^2_∞ en tant qu'espace de Hilbert, A et A_α seront des opérateurs auto-adjoints. On notera E et E_α leur mesure spectrale (cf. Rudin [Rud91] par exemple) et R_μ, R^α_μ les résolvantes pour μ

dans l'espace résolvant (i.e. hors du spectre). On désire étudier les liens entre la convergence des opérateurs (A_α), des mesures spectrales (E_α) et des résolvantes R^α_μ ; nous allons montrer que la convergence de l'un entraîne la convergence des autres, c'est le contenu du théorème $\mathbb{III}$.9.

Théorème $\mathbb{III}$.9.
Soient (A_α) et A des opérateurs auto-adjoints, (E_α) et E leur mesure spectrale respectives et R^α_μ , R_μ les résolvantes pour μ dans l'espace résolvant. Alors les assertions suivantes sont équivalentes

1. *$R^\alpha_\mu \to R_\mu$ fortement (resp. compactement) pour μ hors de la réunion des spectres des A_α et A.*
2. *$\varphi(A_\alpha) \to \varphi(A)$ fortement (resp. compactement) pour toute fonction continue à support compact $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.*
3. *$\varphi_\alpha(A_\alpha) \to \varphi(A)$ fortement (resp. compactement) pour tout filet $\{\varphi_\alpha \mid \mathbb{R} \to \mathbb{C}\}$ de fonctions continues, s'annulant à l'infini et convergeant uniformément vers φ, une fonction s'annulant à l'infini.*
4. *$E_\alpha\big(]\lambda, \mu]\big) \to E\big(]\lambda, \mu]\big)$ fortement (resp. compactement) pour toute paire de nombres réels qui ne sont pas dans le spectre de A.*
5. *$\langle E_\alpha u_\alpha, v_\alpha\rangle_\alpha \to \langle Eu, v\rangle_\infty$ vaguement pour tous filets de vecteurs $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ et $(v_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ tels que $u_\alpha \to u$ fortement et $v_\alpha \to v$ faiblement (resp. $u_\alpha \to u$ faiblement et $v_\alpha \to v$ faiblement).*

Preuve. 3 implique facilement 2 et 1.

1 ⇒ 2 et 3 Considérons l'ensemble **A** des fonctions φ, continues, s'annulant à l'infini telles que $\varphi(A_k)$ converge fortement (resp. compactement) vers $\varphi(A)$. Remarquons que pour toute paire de fonctions bornées $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ on a

$$\big\|\varphi(A_k) - \psi(A_k)\big\|, \big\|\varphi(A) - \psi(A)\big\| \le \sup_{x\in\mathbb{R}}\big|\varphi(x) - \psi(x)\big|$$

de sorte qu'une limite uniforme de fonction dans **A** est encore dans **A**. C'est donc une algèbre fermée pour la convergence uniforme et la conjugaison complexe. Comme elle contient les fonctions de la forme $x \mapsto (\zeta - x)^{-1}$ pour $\zeta \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$ elle sépare les points de $\overline{\mathbb{R}}$. Ainsi, par le théorème de Stone-Weierstrass, elle contient toutes les fonctions qui s'annulent à l'infini. Ce qui démontre 2. Considérons un filet (φ_α) convergeant uniformément vers une fonction s'annulant à l'infini. Alors, soit une suite (u_α) convergeant fortement (resp. faiblement) et (v_α) une suite convergeant faiblement,

$$\begin{aligned}
&\big|\langle\varphi_\alpha(A_\alpha)u_\alpha, v_\alpha\rangle - \langle\phi(A)u, v\rangle\big| \\
&\qquad\le \big|\langle\varphi_\alpha(A_\alpha)u_\alpha, v_\alpha\rangle - \langle\varphi(A_\alpha)u_\alpha, v_\alpha\rangle\big| + \big|\langle\varphi(A_\alpha)u_\alpha, v_\alpha\rangle - \langle\phi(A)u, v\rangle\big| \\
&\qquad\le \sup_{x\in\mathbb{R}}\big|\varphi_\alpha(x) - \varphi(x)\big| \cdot \|u_\alpha\| \cdot \|v_\alpha\| + \big|\langle\varphi(A_\alpha)u_\alpha, v_\alpha\rangle - \langle\phi(A)u, v\rangle\big|
\end{aligned}$$

le premier terme de droite tend vers 0, grâce à la convergence uniforme, et le dernier également car φ est une fonction s'annulant à l'infini et continue, donc dans

A. Soient $u, v \in L^2_\infty$ et $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$, $(v_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ des filets tels que $u_\alpha \to u$ fortement (resp. faiblement) et $v_\alpha \to v$ faiblement (resp. faiblement). Posons $a_\alpha = \langle E_\alpha u_\alpha, v_\alpha\rangle_\alpha$ et $a_\infty = \langle Eu, v\rangle_\infty$, alors on a

$$\langle\varphi(A)u, v\rangle_\infty = \int_{\mathbb{R}} \varphi \, da_\infty, \qquad a_\infty\big(]\lambda, \mu]\big) = \langle E(]\lambda, \mu])u, v\rangle_\infty$$

et les mêmes formules avec a_α, A_α et $E_\alpha(]\lambda, \mu])$. Les équivalences 2–5 proviennent simplement des définitions I.44. ❑

II.2.b — Rappelons qu'une forme quadratique $\mathcal{Q}$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ sur $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$) est obtenu à partir d'une forme sesquilinéaire (resp. bilinéaire), symétrique et positive $\mathcal{E} : D(\mathcal{E}) \times D(\mathcal{E}) \to \mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$), où $D(\mathcal{E}) \subset \mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel, en posant $\mathcal{Q}(u) = \mathcal{E}(u,u)$. On remarquera que $\mathcal{E}_1(u,v) = \langle u,v\rangle_{\mathcal{H}} + \mathcal{E}(u,v)$ pour u, $v \in D(\mathcal{E})$ est aussi une forme sesquilinéaire (resp. bilinéaire) symétrique et positive. De sorte que $D(\mathcal{E})$ muni de $\mathcal{E}_1$ devient un espace pré-hilbertien. On dira que $\mathcal{Q}$ est fermée si, et seulement si, $\big(D(\mathcal{E}), \mathcal{E}_1\big)$ est complet. Dans la suite on identifiera la forme quadratique $\mathcal{Q}$ avec la forme quadratique étendue $\mathcal{E}$ définie par $\mathcal{E}(u) = \mathcal{Q}(u)$ sur $D(\mathcal{E})$ et $\mathcal{E}(u) = \infty$ sur $\mathcal{H} \setminus D(\mathcal{E})$. Dans ce cas, la fermeture de $\mathcal{E}$ est équivalente à la semi-continuité inférieure de $\mathcal{E} : \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}$.

Définition III.10 (Compacité asymptotique).
Soit un filet $(\mathcal{E}_\alpha)$ de formes quadratiques fermées, où $\mathcal{E}_\alpha$ est une forme quadratique sur L^2_α, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$. On dira que ce filet est *asymptotiquement compact* si, et seulement si, de tout filet $(v_\alpha)_\alpha$ tel que

$$\limsup_\alpha \mathcal{E}_\alpha(v_\alpha) + \|v_\alpha\|^2_\alpha < \infty$$

on peut extraire un sous-filet fortement convergeant.

II.2.c — Une **structure spectrale** sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ sur $\mathbb{C}$ (resp. $\mathbb{R}$) est la donnée d'un ensemble

$$\Sigma = \big\{A, \mathcal{E}, E, (T_t), (R_\zeta)\big\}$$

où A est un opérateur auto-adjoint, défini et positif sur $\mathcal{H}$, vu comme le générateur infinitésimal associé à une forme quadratique $\mathcal{E}$ définie sur un sous espace dense (déterminé par $D(\mathcal{E}) = D(\sqrt{A})$ et $\mathcal{E}(u,v) = \langle\sqrt{A}u, \sqrt{A}v\rangle_{\mathcal{H}}$ pour u et v dans $D(\mathcal{E})$), E est la mesure spectrale, $(T_t)_{t\geq 0}$ est un semi-groupe à un paramètre de contractions fortements continues ($T_t = e^{-tA}$, $t \geq 0$) et (R_ζ) est une résolvante fortement continue ($R_\zeta = (\zeta - A)^{-1}$ pour $\zeta \in \rho(A)$, où $\rho(A)$ est l'ensemble résolvant de A).

Dans la suite on étudiera des structures spectrales Σ_α sur L^2_α, on notera alors

$$\Sigma_\alpha = \big\{A_\alpha, \mathcal{E}_\alpha, E_\alpha, (T^\alpha_t), (R^\alpha_\zeta)\big\}$$

Définition $\mathbb{III}$.11.
Soient $(\Sigma_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ un filet, avec Σ_α une structure spectrale sur L^2_α, pour tout $\alpha \in \mathcal{A}$, et Σ une structure spectrale sur L^2_∞, on dira que le filet $(\Sigma_\alpha)_\alpha$ converge fortement (resp. compactement) vers Σ si, et seulement si l'une des conditions équivalentes du théorème $\mathbb{III}$.9 est vérifiée.

Propriétés $\mathbb{III}$.12.
Soit $(\Sigma_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ un filet de structures spectrales convergeant fortement vers Σ alors, pour toute suite $(v_\alpha)_\alpha$ convergeant faiblement vers v, on a

$$\mathcal{E}(v) \leq \liminf_\alpha \mathcal{E}_\alpha(v_\alpha)$$

Si de plus le filet $(\Sigma_\alpha)_\alpha$ converge compactement, alors le filet des formes quadratiques $(\mathcal{E}_\alpha)$ est asymptotiquement compact.

Preuve. Supposons le filet de résolvantes (R^α_λ) fortement convergent. Notons

$$a^\lambda_\alpha(u,v) = -\lambda\langle u - \lambda R^\alpha_\lambda u, v\rangle_\alpha$$

(approximation de Deny-Yosida de la forme bilinéaire associée à $\mathcal{E}_\alpha$), alors le filet $(a^\lambda_\alpha(u,u))$ converge vers $\mathcal{E}_\alpha(u)$ en croissant lorsque $\lambda \to -\infty$ (cf. Mosco [Mos94] 1.(i)). Il est facile de voir que, par hypothèse, pour (u_α) et (v_α) convergeant respectivement fortement vers u et faiblement vers v,

$$\lim_\alpha a^\lambda_\alpha(u_\alpha, v_\alpha) = -\lambda\langle u - \lambda R_\lambda u, v\rangle_\infty = a^\lambda(u,v).$$

On rappelle que (cf. Dal Maso [Mas93] proposition 12.12)

$$a^\lambda(u,u) \geq a^\lambda(v,v) + 2\lambda\langle v - \lambda R_\lambda v, u - v\rangle_\infty$$

en sorte que, pour tout filet v_α convergeant faiblement vers u et w_α un filet convergeant fortement vers u, on a :

$$\mathcal{E}_\alpha(v_\alpha) \geq a^\lambda_\alpha(v_\alpha, v_\alpha) \geq a^\lambda_\alpha(w_\alpha, w_\alpha) + 2\lambda\langle w_\alpha - \lambda R^\alpha_\lambda w_\alpha, v_\alpha - w_\alpha\rangle$$

ainsi $\liminf_\alpha \mathcal{E}_\alpha(v_\alpha) \geq a^\lambda(u,u)$ pour tout $\lambda < 0$, en faisant tendre $\lambda \to -\infty$, on conclut à $\liminf_\alpha \mathcal{E}_\alpha(v_\alpha) \geq \mathcal{E}(u)$.

Supposons maintenant que (Σ_α) converge compactement, et soit un filet $(u_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ tel que

$$\sup_\alpha\big(\mathcal{E}_\alpha(u_\alpha) + \|u_\alpha\|^2_\alpha\big) \leq M < \infty.$$

Quitte à prendre un sous-filet on peut supposer que $(u_\alpha)_\alpha$ converge faiblement vers u. Soit $\rho > 0$ un nombre qui n'est pas dans le spectre de A_∞. Puisque

$$\int_{]\rho,\infty[} d\langle E_\alpha u_\alpha, u_\alpha\rangle_\alpha \leq \frac{1}{\rho}\int_{]\rho,\infty[} \lambda d\langle E_\alpha(\lambda)u_\alpha, u_\alpha\rangle_\alpha \leq \frac{\mathcal{E}_\alpha(u_\alpha)}{\rho} \leq \frac{M}{\rho}$$

on a

$$\|u_\alpha\|_\alpha^2 \leq \int_{[0,\rho]} d\langle E_\alpha u_\alpha, u_\alpha\rangle_\alpha + \frac{M}{\rho}$$

la convergence compacte implique que $\lim_\alpha \int_{[0,\rho]} d\langle E_\alpha u_\alpha, u_\alpha\rangle_\alpha = \int_{[0,\rho]} d\langle Eu, u\rangle_\infty$ en sorte que

$$\limsup_\alpha \|u_\alpha\|_\alpha^2 \leq \int_{[0,\rho]} d\langle Eu, u\rangle_\infty + \frac{M}{\rho} \leq \|u\|_\infty^2 + \frac{M}{\rho}$$

et, en faisant tendre $\rho \to \infty$, on obtient

$$\limsup_\alpha \|u_\alpha\|_\alpha^2 \leq \|u\|_\infty^2.$$

En utilisant le lemme II.41 on en déduit la convergence forte du filet (u_α). ❑

Afin d'être exhaustif, voici une dernière définition, équivalente.

Théorème III.13.
Soient $(\Sigma_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ un filet de structures spectrales sur les espaces L_α^2, Σ une structure spectrale sur L_∞^2, alors $\Sigma_\alpha \to \Sigma$ fortement (resp. compactement) si, et seulement si, pour tout $t \geq 0$ le filet (T_t^α) converge fortement (resp. compactement) vers T_t

II.3 Comportement asymptotique du spectre

Considérons à présent un filet de structures spectrales (Σ_α), comme défini en II.2.c et intéressons-nous plus particulièrement au spectre. Pour un opérateur donné, on notera $\sigma(\cdot)$ son spectre. Observons d'abord le cas de la convergence forte :

Proposition III.14.
Si $\Sigma_\alpha \to \Sigma$ fortement, alors, pour tout $\lambda \in \sigma(A)$, il existe $\lambda_\alpha \in \sigma(A_\alpha)$ tel que le filet (λ_α) converge vers λ on note cela :

$$\sigma(A) \subset \lim_\alpha \sigma(A_\alpha)$$

Preuve. Soient $\lambda \in \sigma(A)$ et $\varepsilon > 0$, posons $\zeta = \lambda + i\varepsilon$ alors :

$$\|R_\zeta^\alpha\|_{\mathcal{L}_\alpha} = \frac{1}{\inf_{\rho\in\sigma(A_\alpha)} |\zeta - \rho|} \qquad \text{et} \qquad \|R_\zeta\|_{\mathcal{L}_\infty} = \frac{1}{\inf_{\rho\in\sigma(A)} |\zeta - \rho|} = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Par hypothèse, le filet des résolvantes converge fortement en sorte que, par II.47,

$$\limsup_\alpha \inf_{\rho\in\sigma(A_\alpha)} |\zeta - \rho| \leq \varepsilon$$

cela étant vrai pour tout ε, on conclut. ❑

Lemme $\mathbb{III}$.15.
Si deux nombres réels a,b tels que $-\infty \le a < b \le +\infty$ ne sont pas dans le spectre de A, alors

$$a \le \frac{\mathcal{E}(u)}{\|u\|_\infty^2} \le b \quad \textit{pour tout } u \in E\big(]a,b]\big)L^2_\infty \setminus \{0\}.$$

(où $E\big(]a,b]\big) = E\big(]a,+\infty[\big)$ si $b = +\infty$).

Preuve. Soient donc $a < b$ deux nombres hors du spectre de A et

$$u \in E\big(]a,b]\big)L^2_\infty \setminus \{0\}.$$

alors

$$\int_{]a,b]} dEu = E\big(]a,b]\big)u = u = \int_{\mathbb{R}} dEu$$

ainsi $\langle Eu, u\rangle = 0$ sur $\mathbb{R} \setminus]a,b]$. Maintenant si $u \in D(A)$,

$$\mathcal{E}(u) = \langle Au, u\rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda \; d\langle E(\lambda)u, u\rangle = \int_{]a,b]} \lambda \; d\langle E(\lambda)u, u\rangle$$

et le dernier terme vérifie :

$$a\|u\|_\infty^2 = a\int_{]a,b]} d\langle E(\lambda)u, u\rangle \le \int_{]a,b]} \lambda \; d\langle E(\lambda)u, u\rangle \le b\int_{]a,b]} d\langle E(\lambda)u, u\rangle = b\|u\|_\infty^2$$

❑

Pour un borel $I \subset \mathbb{R}$ on note $n(I) = \dim E(I)L^2_\infty$ et $n_\alpha(I) = \dim E_\alpha(I)L^2_\alpha$.

Proposition $\mathbb{III}$.16.
Soient $a < b$ deux nombres hors du spectre de A. Si $\Sigma_\alpha \to \Sigma$ fortement alors

$$\liminf_\alpha n_\alpha\big(]a,b]\big) \ge n\big(]a,b]\big)$$

en particulier

$$\liminf_\alpha \dim L^2_\alpha \ge \dim L^2_\infty$$

Preuve. Prenons une base orthonormée $\{\varphi_k \mid k = 1,\dots,n\big(]a,b]\big)\}$ de $E\big(]a,b]\big)L^2_\infty$. Soit $n \in \mathbb{N}$ un nombre fixé si $n\big(]a,b]\big) = \infty$, sinon $n = n\big(]a,b]\big)$. Alors il existe des filets $\varphi_k^\alpha \in L^2_\alpha$ pour $k = 1,\dots,n$ tels que $\lim_\alpha \varphi_k^\alpha = \varphi_k$. Comme $E_\alpha\big(]a,b]\big) \to E\big(]a,b]\big)$ fortement, en posant $\psi_k^\alpha = E_\alpha\big(]a,b]\big)\varphi_k^\alpha$ on obtient

$$\lim_\alpha \psi_k^\alpha = E\big(]a,b]\big)\varphi_k = \varphi_k$$

en sorte que

$$\lim_\alpha \langle \psi_i^\alpha, \psi_j^\alpha\rangle_\alpha = \langle \varphi_i, \varphi_j\rangle = \delta_{ij}$$

on en déduit que $(\psi_k^\alpha)_{k=1,\dots,n}$ est une famille libre pour α suffisamment grand et

$$\liminf_\alpha n_\alpha\big(]a,b]\big) \ge n.$$

ceci démontre la première assertion ; pour la seconde cela provient du fait que $n\big(]a,b]\big)$ tend vers $\dim L^2_\infty$ quand $a \to -\infty$ et $b \to +\infty$. ❑

Regardons maintenant ce que l'on obtient de plus en cas de convergence compacte :

Théorème $\mathbb{III}$.17.
Si $\Sigma_\alpha \to \Sigma$ converge compactement, alors, pour tout a,b nombres réels hors du spectre de A vérifiant $a < b$, et pour α suffisamment grand, $n_\alpha\big(]a,b]\big) = n\big(]a,b]\big)$. En particulier la limite des ensembles $\sigma(A_\alpha)$ coïncide avec $\sigma(A)$

Preuve. La convergence compacte implique la compacité des opérateurs R_ζ, T_t et $E\big(]\lambda,\mu]\big)$ (cf $\mathbb{I}$.46). Ainsi le spectre de A est discret, et donc $n\big(]a,b]\big) < \infty$ si $a < b < \infty$. Notons $(0 \leq)\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ le spectre de A, où

$$\begin{cases} n = 0 & \text{si le spectre est vide,} \\ n \in \mathbb{N} & \text{si le spectre est fini et} \\ n = \infty & \text{si le spectre est une suite qui tend vers l'infini.} \end{cases} \tag{$\mathbb{III}$-8}$$

Étape 1 : fixons un ε_0 et posons $\Lambda_1^\alpha = E\big(]-\infty,\lambda_1+\varepsilon_0]\big)L^2_\alpha$ et $\Lambda_1 = L^2_\infty$, où $\lambda_1 = \lambda_1 + \varepsilon_0 = \infty$ si $n = 0$. Soit

$$\mu_1 = \liminf_\alpha \inf\big\{\mathcal{E}_\alpha(u) \mid \|u\|_\alpha = 1,\ u \in \Lambda_1^\alpha\big\}$$

le lemme $\mathbb{III}$.15 nous permet de dire que $\lim_\alpha n_\alpha\big(]-\infty,\mu]\big) = 0$, pour tout $\mu \in]-\infty,\mu_1[$. En appliquant la proposition $\mathbb{III}$.16 on obtient que $n\big(]-\infty,\mu]\big) = 0$, autrement dit pour tout $\mu \leq \mu_1$ alors $\mu \leq \lambda_1$ donc $\mu_1 \leq \lambda_1$. De sorte que, si $\mu_1 = +\infty$ alors, $n = 0$ et $L^2_\alpha = 0$ pour α suffisamment grand. Dans ce cas le théorème est démontré.

Supposons que $\mu_1 < +\infty$. Pour α suffisamment grand on peut trouver des vecteurs unitaires $\varphi_1^\alpha \in \Lambda_1^\alpha$ tels que $\liminf_\alpha \mathcal{E}_\alpha(\varphi_1^\alpha) = \mu_1$. De la compacité asymptotique des $\mathcal{E}_\alpha$ on extrait un sous-filet de $(\varphi_1^\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ tel que $\varphi_1 = \lim_\alpha \varphi_1^\alpha$ fortement donc suivant $\mathbb{III}$.12 $\mathcal{E}(\varphi_1) \leq \mu_1$. La convergence forte entraîne la convergence des normes en sorte que $\|\varphi_1\| = 1$ et donc

$$\lambda_1 = \inf\big\{\mathcal{E}(u) \mid \|u\| = 1,\ u \in \Lambda_1\big\} \leq \mathcal{E}(\varphi_1) \leq \mu_1 < +\infty. \tag{$\mathbb{III}$-9}$$

Par conséquent $n \geq 1$, $\lambda_1 = \mu_1 = \mathcal{E}(\varphi_1)$ et φ_1 est un vecteur propre de A pour λ_1.

Remarquons de plus que, puisque $E_\alpha\big(]\lambda_1-\epsilon,\lambda_1+\epsilon]\big) \to E\big(]\lambda_1-\epsilon,\lambda_1+\epsilon]\big)$ fortement pour $\epsilon > 0$ fixé et que $E\big(]\lambda_1-\epsilon,\lambda_1+\epsilon]\big) \to E\big(\{\lambda_1\}\big)$ fortement quand $\epsilon \to 0$, il existe un filet de nombres positifs $\epsilon_1^\alpha \to 0$ tel que $E_\alpha\big(]\lambda_1-\epsilon_1^\alpha,\lambda_1+\epsilon_1^\alpha]\big) \to E\big(\{\lambda_1\}\big)$ fortement. On en déduit un filet

$$\psi_1^\alpha = E_\alpha\big(]\lambda_1-\epsilon_1^\alpha,\lambda_1+\epsilon_1^\alpha]\big)\varphi_1^\alpha \to E\big(\{\lambda_1\}\big)\varphi_1 = \varphi_1. \tag{$\mathbb{III}$-10}$$

Étape 2 : On pose $\Lambda_2^\alpha = E\big(]-\infty,\lambda_2+\varepsilon_0]\big)L^2_\alpha \cap \langle\varphi_1^\alpha\rangle^\perp$, $\Lambda_2 = \langle\varphi_1\rangle^\perp$ et

$$\mu_2 = \liminf_\alpha \inf\big\{\mathcal{E}_\alpha(u) \mid \|u\|_\alpha = 1,\ u \in \Lambda_2^\alpha\big\}.$$

De nouveau le lemme III.15 nous permet d'affirmer que $\lim_\alpha n_\alpha\big(]-\infty, \mu]\big) = 0$, pour tout $\mu \in \big(]\mu_1, \mu_2[\big)$, et la proposition III.16 que $\mu_2 \leq \lambda_2$. De sorte que si $\mu_2 = +\infty$, on a les égalités $n = 1$ et $L^2_\alpha = \langle \psi_1^\alpha \rangle$ pour α suffisamment grand. Supposons $\mu_2 < \infty$. On prend des vecteurs unitaires $\varphi_2^\alpha \in \Lambda_2^\alpha$ tels que $\liminf_\alpha \mathcal{E}_\alpha(\varphi_2^\alpha) = \mu_2$. Alors le même raisonnement qu'à l'étape 1 donne $n \geq 2$, $\lambda_2 = \mu_2$ et la convergence forte d'un sous-filet des (φ_2^α) vers φ_2 vecteur propre de A pour la valeur propre λ_2. De même, on trouve un filet $\epsilon_2^\alpha \to 0$ tel que $\psi_2^\alpha = E_\alpha\big(]\lambda_2 - \epsilon_2^\alpha, \lambda_2 + \epsilon_2^\alpha]\big)L^2_\alpha \to \varphi_2$. À présent remarquons que pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\alpha_\epsilon \in \mathcal{A}$ tel que, pour tout $\alpha \succeq \alpha_\epsilon$, on ait

1. $\psi_i^\alpha \in E_\alpha\big(]\lambda_i - \epsilon, \lambda_i + \epsilon]\big)L^2_\alpha$ pour $i = 1{,}2$;
2. si $\lambda_1 + 2\epsilon < \lambda_2$ alors

$$E_\alpha\big(]\lambda_1 - \epsilon, \lambda_1 + \epsilon]\big)L^2_\alpha = \langle \psi_1^\alpha \rangle \quad \text{et} \quad E_\alpha\big(]\lambda_1 + \epsilon, \lambda_2 - \epsilon]\big)L^2_\alpha = 0.$$

Étape 3 : On répète ce procédé. Si on pose

$$\Lambda_k^\alpha = E\big(]-\infty, \lambda_k + \varepsilon_0]\big)L^2_\alpha \cap \langle \psi_1^\alpha, \ldots, \psi_{k-1}^\alpha \rangle^\perp$$

on obtient

$$\lambda_k = \mu_k = \liminf_\alpha \inf\big\{\mathcal{E}_\alpha(u) \mid \|u\|_\alpha = 1,\ u \in \Lambda_k^\alpha\big\}$$

pour $k \leq n$. Soit $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ quelconque et $\epsilon > 0$ suffisamment petit relativement à k. Alors il existe $\alpha_{k,\epsilon} \in \mathcal{A}$ tel que, pour tout $\alpha \succeq \alpha_{k,\epsilon}$,

1. pour tout $\lambda \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}\}$ et $\lambda < \lambda_k$,

   $$E_\alpha\big(]\lambda - \epsilon, \lambda + \epsilon]\big)L^2_\alpha = \langle \psi_i^\alpha \mid p_\lambda \leq i \leq q_\lambda \rangle,$$

   avec $p_\lambda = \min\{i \in \mathbb{N} \mid \lambda_i = \lambda\}$ et $q_\lambda = \max\{i \in \mathbb{N} \mid \lambda_i = \lambda\}$;
2. pour $i = 1, \ldots, k-1$ avec $\lambda_i < \lambda_{i+1}$,

   $$E_\alpha\big(]\lambda_i + \epsilon, \lambda_{i+1} - \epsilon]\big)L^2_\alpha = \{0\}.$$

Conclusion Soit $a{,}b \in \mathbb{R}^+ \setminus \sigma(A)$ deux nombres donnés tels que $a < b$, alors ce qui précède montre que pour α suffisamment grand

$$E_\alpha\big(]a, b]\big)L^2_\alpha = \langle \psi_k^\alpha \mid k = 1, \ldots, n \text{ avec } a < \lambda_k \leq b \rangle.$$

Ainsi $n_\alpha\big(]a, b]\big)$ coïncide avec le nombre de k tels que $a < \lambda_k \leq b$, autrement dit $n\big(]a, b]\big)$. ❏

Concluons par le résultat qui nous concerne tout particulièrement.

Corollaire $\mathbb{III}$.17.bis
Supposons que $\Sigma_\alpha \longrightarrow \Sigma$ compactement et que toutes les résolvantes R^α_ζ soient compactes. Notons alors λ_k (resp. λ^α_k) la $k^{ème}$ valeur propre de A (resp. A_α) avec multiplicité. On pose $\lambda_k = +\infty$ si $k > \dim L^2_\infty + 1$ quand $\dim L^2_\infty < \infty$, et $\lambda^\alpha_k = +\infty$ si $k > \dim L^2_\alpha + 1$ quand $\dim L^2_\alpha < \infty$. Alors

$$\lim_\alpha \lambda^\alpha_k = \lambda_k \quad \textit{pour tout } k$$

De plus, soit $\{\varphi^\alpha_k \mid k = 1, \dots, \dim L^2_\alpha\}$ une base orthonormale de L^2_α telle que φ^α_k soit vecteur propre de A_α relativement à λ^α_k. Alors il existe un sous-filet tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $k \leq \dim L^2_\infty$ les vecteurs φ^α_k convergent fortement vers φ_k vecteur propre de A pour la valeur propre λ_k et tel que $\{\varphi_k \mid k = 1, \dots, \dim L^2_\infty\}$ soit une base orthonormale complète de L^2_∞.

Preuve. Il faut reprendre la démonstration du théorème $\mathbb{III}$.17 en redéfinissant les Λ^α_k à l'aide des φ^α_k directement. ❏

Remarque $\mathbb{III}$.18. La technique utilisé fait appel à la caractérisation variationnelle des valeurs propres que l'on appelle min-max.

III Homogénéisation sur les nilvariétés graduées

Nous allons à présent étudier le spectre du laplacien sous-riemannien $\Delta_{\mathcal{H}}$ sur les boules sous-riemanniennes. Plus précisément l'objectif est de démontrer le théorème suivant :

Théorème $\mathbb{III}$.19 (Spectre asymptotique, version sous-riemannienne).
Soit $M^n = \Gamma\backslash G$ une nilvariété graduée, munie d'une métrique sous-riemannienne g quelconque sur la distribution issue du premier espace de la graduation. Notons d_g la distance sous-riemannienne, $B_g(\rho)$ les boules centrées en l'identité, de rayon ρ, induites sur le revêtement universel et $\lambda_i\big(B_g(\rho)\big)$ la $i^{\text{ème}}$ valeur propre du laplacien sous-riemannien pour le problème de Dirichlet sur $B_g(\rho)$.

Alors il existe un opérateur hypoelliptique Δ_∞, le laplacien de Kohn associé à une métrique sous-riemannienne invariante à gauche sur G, tel qu'en notant λ_i^∞ sa $i^{\text{ème}}$ valeur propre pour le problème de Dirichlet sur la boule unité de la distance d_∞ issue de la norme stable on ait :

$$\lim_{\rho\to\infty} \rho^2 \lambda_i\big(B_g(\rho)\big) = \lambda_i^\infty$$

Remarque $\mathbb{III}$.20. En d'autre terme, sur le revêtement universel, on part d'une métrique sous-riemannienne invariante par l'action à gauche d'un sous-groupe co-compact Γ et on en déduit le comportement du laplacien sous-riemannien sur les boules de grand rayon grâce à une métrique invariante à gauche par G.

III.1 Homogénéisation des laplaciens sous-riemanniens

Dans ce paragraphe nous allons construire l'opérateur Δ_∞ du théorème $\mathbb{III}$.19. Pour cela on commence par construire les fonctions χ^i périodiques et régulières relativement à Γ solutions de

$$\Delta_{\mathcal{H}}\chi^i = -\frac{1}{F(g,X)}\sum_{k=1}^{d_1} X_k\big(F(g,X)g_{\mathcal{H}}^{ki}\big) \qquad (\mathbb{III}\text{-}11)$$

qui existent suivant le lemme $\mathbb{III}$.26 puisque les fonctions $F(g,X)g_{\mathcal{H}}^{ki}$ sont périodiques relativement à Γ (elles sont définies sur le quotient) en sorte que la moyenne sur D_Γ de ce terme est nulle. Alors on appellera laplacien sous-riemannien homogénéisé l'opérateur déterminé par (en adoptant les conventions d'Einstein pour les sommations) :

$$\Delta_\infty f = -\frac{1}{\mu_g(D_\Gamma)}\left(\int_{D_\Gamma} g_{\mathcal{H}}^{ij} - g_{\mathcal{H}}^{ik} X_k\cdot\chi^j \, d\mu_g\right) X_i X_j f \qquad (\mathbb{III}\text{-}12)$$

Remarque $\mathbb{III}$.21. Si X_i^* est la 1-forme duale de X_i pour $i = 1, \ldots, d_1$ définissons les 1-formes suivantes

$$\varpi_i = d\chi^i - X_i^*$$

alors, on peut remarquer que

$$\begin{aligned}\int_{D_\Gamma} g^{ij}_{\mathcal{H}} - g^{ik}_{\mathcal{H}} X_k\cdot\chi^j \, d\mu_g &= \int_{D_\Gamma} g^{ik}_{\mathcal{H}}\big(X^*_j\cdot X_k - d\chi^j\cdot X_k\big)\, d\mu_g \\ &= -\int_{D_\Gamma} \varpi_j\cdot(g^{ik}_{\mathcal{H}}X_k)\, d\mu_g\end{aligned}$$

Munissons l'ensemble des 1-formes sur M^n de la forme bilinéaire définie par

$$\langle\omega,\varpi\rangle_2 = \frac{1}{\mu_g(D_\Gamma)}\int_{D_\Gamma} g^{kl}_{\mathcal{H}}\omega\cdot X_k \;\varpi\cdot X_l \, d\mu_g$$

alors on a

Lemme III.22.
Soient $\varpi_i = d\chi^i - X^*_i$ pour $i = 1,\dots,d_1$: on a l'égalité

$$\Delta_\infty f = \sum_{i,j=1}^{d_1}\langle\varpi_i,\varpi_j\rangle_2 X_i X_j\cdot f$$

autrement dit, Δ_∞ est le laplacien de Kohn associé à la métrique sous-riemannienne invariante à gauche par G déterminée par la matrice inverse de la matrice $(\langle\varpi_i,\varpi_j\rangle_2)$.

Preuve. Détaillons les calculs,

$$\begin{aligned}\mu_g(D_\Gamma)\langle\varpi_i,\varpi_j\rangle_2 = &\int_{D_\Gamma} g^{ij}_{\mathcal{H}}\, d\mu_g + \int_{D_\Gamma} g^{kl}_{\mathcal{H}} d\chi^i\cdot X_k\; d\chi^j\cdot X_l\, d\mu_g \\ &- \int_{D_\Gamma} g^{kj}_{\mathcal{H}} d\chi^i\cdot X_k\, d\mu_g - \int_{D_\Gamma} g^{il}_{\mathcal{H}} d\chi^j\cdot X_l\, d\mu_g\end{aligned}$$

en utilisant l'équation (III-11) on obtient

$$\begin{aligned}\mu_g(D_\Gamma)\langle\varpi_i,\varpi_j\rangle_2 = &\int_{D_\Gamma} g^{ij}_{\mathcal{H}}\, d\mu_g - \int_{D_\Gamma}\frac{1}{F(g,X)} X_k\big(F(g,X)g^{ki}_{\mathcal{H}}\big)\chi^j\, d\mu_g \\ &- \int_{D_\Gamma} g^{kj}_{\mathcal{H}} X_k\cdot\chi^i\, d\mu_g - \int_{D_\Gamma} g^{il}_{\mathcal{H}} X_l\cdot\chi^j\, d\mu_g\end{aligned}$$

de sorte qu'en intégrant par partie cela donne

$$\begin{aligned}\mu_g(D_\Gamma)\langle\varpi_i,\varpi_j\rangle_2 = &\int_{D_\Gamma} g^{ij}_{\mathcal{H}}\, d\mu_g + \int_{D_\Gamma} g^{ki}_{\mathcal{H}}\; X_k\cdot\chi^j\, d\mu_g \\ &- \int_{D_\Gamma} g^{kj}_{\mathcal{H}}\; X_k\cdot\chi^i\, d\mu_g - \int_{D_\Gamma} g^{il}_{\mathcal{H}}\; X_l\cdot\chi^j\, d\mu_g\end{aligned}$$

qui se simplifie comme suit :

$$\mu_g(D_\Gamma)\langle\varpi_i,\varpi_j\rangle_2 = \int_{D_\Gamma} g^{ij}_{\mathcal{H}}\, d\mu_g - \int_{D_\Gamma} g^{kj}_{\mathcal{H}}\; X_k\cdot\chi^i\, d\mu_g$$

ce qui termine la démonstration. ❑

III.2 Espaces de Sobolev adaptés

Soit v une fonction différentiable sur G. On appellera gradient sous-riemannien de v le champs de vecteurs $\nabla_{\mathcal{H},g} v$ sur $\mathcal{H}$ défini par

$$dv_x \cdot X = g_x\big(\nabla_{\mathcal{H},g} v(x), X\big), \quad \forall\, x \in G,\, \forall X \in \mathcal{H}_x.$$

On définira aussi le champs de vecteurs $\nabla_{\mathcal{H}} v$ par $\nabla_{\mathcal{H},g} v = \big(g^{ij}_{\mathcal{H}}\big)\nabla_{\mathcal{H}} v$ (Les coordonnées de $\nabla_{\mathcal{H}} v$ sont simplement $dv_x.X_i$).

Définition $\mathbb{III}$.23.
On dira d'une fonction f qu'elle est périodique relativement à Γ si, et seulement si, pour tout $x \in G$ et $\gamma \in \Gamma$ elle vérifie

$$f(\gamma * x) = f(x)$$

Définition $\mathbb{III}$.24.
Une fonction sera dite périodique et régulière relativement à Γ, si elle est la limite d'une suite de fonctions $C^\infty(G)$ et périodique relativement à Γ pour la norme

$$\|v\|^2_{G,\Gamma} = \int_{D_\Gamma} |v|^2 \, d\mu_g + \int_{D_\Gamma} |\nabla_{\mathcal{H},g} v|^2 \, d\mu_g$$

On notera $D^0_{\mathcal{H}}(\Omega, \mu_g)$ l'adhérence de l'espace $C^\infty_0(\Omega)$ pour la norme $\|\cdot\|_{g,\Omega}$, donné par

$$\|v\|^2_{g,\Omega} = \int_{\Omega} |v|^2 \, d\mu_g + \int_{\Omega} |\nabla_{\mathcal{H},g} v|^2 \, d\mu_g,$$

dans $D_{\mathcal{H}}(\Omega, \mu_g) = \big\{v \in L^2(\Omega, \mu_g) \mid \|v\|_{g,\Omega} < +\infty\big\}$ et $D^{per}_{\mathcal{H}}(\Omega, \mu_g)$ le sous espace fermé des fonctions périodiques et régulières relativement à Γ dans $D_{\mathcal{H}}(\Omega, \mu_g)$.

Théorème $\mathbb{III}$.25.
Soit D un domaine compact de G, alors l'espace $D^0_{\mathcal{H}}(D, \mu_g)$ s'injecte compactement dans l'espace $L^2(D, \mu_g)$.

Pour une démonstration de ce théorème on pourra consulter [FSC97] théorème 3.4, ou [Dan91].

Lemme $\mathbb{III}$.26.
Pour tout $f \in L^2(D_\Gamma)$ l'équation

$$\Delta_{\mathcal{H}}(\psi) = f \text{ dans } D_\Gamma \tag{$\mathbb{III}$-13}$$

admet une unique solution faible périodique et régulière relativement à Γ (à une constante additive près) si, et seulement si, $\int_{D_\Gamma} f \, d\mu_g = 0$.

Preuve. On cherche $\psi \in D^{per}_{\mathcal{H}}(D_\Gamma, \mu_g)$ telle que

$$\int_{D_\Gamma} \sum_{i,j=1}^{d_1} g^{ij}_{\mathcal{H}} X_j \psi \; X_i \phi \, d\mu_g = \int_{D_\Gamma} f \phi \, d\mu_g, \quad \text{pour tout } \phi \in D^{per}_{\mathcal{H}}(D_\Gamma, \mu_g). \tag{$\mathbb{III}$-14}$$

en prenant pour ϕ une fonction constante, la condition s'avère nécessaire. Réciproquement, la condition de moyenne nulle sur f nous permet de définir une application linéaire sur $\widetilde{D}_{\mathcal{H}}^{per}(D_\Gamma, \mu_g) = D_{\mathcal{H}}^{per}(D_\Gamma, \mu_g)/\mathbb{R}$. Les conditions d'Hörmander étant vérifiées, la forme bilinéaire symétrique

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{D}_{\mathcal{H}}^{per}(D_\Gamma, \mu_g)^2 & \to & \mathbb{R} \\ (\psi, \phi) & \mapsto & \int_{D_\Gamma} \sum_{i,j=1}^{d_1} g_{\mathcal{H}}^{ij} \, X_j \psi \; X_i \phi \; d\mu_g \end{array}$$

est définie et positive, en sorte que le théorème de représentation de Riesz permet de conclure. ❑

Lemme III.27.
Soit $f \in L^1(D_\Gamma)$, et f_t la fonction déterminée par $f_t(\xi) = f\big(\delta_t(\xi)\big)$, si h_t est son extension périodique relativement à Γ, elle converge L^∞ faiblement $*$:

$$h_t \xrightarrow[(L^\infty)faible*]{} \frac{1}{\mu_g(D_\Gamma)} \int_{D_\Gamma} f(\xi) d\mu_g(\xi) = \mathcal{M}(f) \qquad \text{(III-15)}$$

La démonstration de ce lemme est la même que celle du lemme III.4

Dans la suite on notera $\|\cdot\|_{\mathcal{H},\rho}$ (pour $\rho \in \overline{\mathbb{R}}$) la norme déterminée par

$$\|v\|_{\mathcal{H},\rho}^2 = \int_\Omega v^2 d\mu_\rho + \int_\Omega |\nabla_{\mathcal{H},g} v|_\rho^2 \, d\mu_\rho, \quad \rho \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \text{(III-16)}$$

les espaces $L_\rho^2(\Omega) = L^2(\Omega, \mu_\rho)$, $D_\rho^0(\Omega)$ l'adhérence pour la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H},\rho}$ des fonctions $C_0^\infty(\Omega)$ dans l'espace $D_\rho(\Omega) = \big\{v \in L^2(\Omega, \mu_\rho) \mid \|v\|_{\mathcal{H},\rho}^2 < \infty\big\}$.

III.3 Convergence compacte des résolvantes

Dans cette section on notera $B_\rho(1)$ la boule unité pour la distance d_ρ associée à la métrique ré-échelonnée g_ρ. On introduit les formes bilinéaires suivantes

$$a^\rho(u, v) = \int_{B_\rho(1)} g_\rho^{ij} \; X_i u \; X_j v \; d\mu_\rho$$

et

$$a_\lambda^\rho(u, v) = a^\rho(u, v) + \lambda(u, v)_\rho$$

avec

$$(u, v)_\rho = \int_{B_\rho(1)} uv \; d\mu_\rho$$

Remarque III.28. De la périodicité des métriques étudiées et de l'hypoellipticité, on déduit l'existence de constantes α et β telles que (cf. définition III-16)

$$\alpha \|v\|_{\mathcal{H},\rho}^2 \leq a_\lambda^\rho(v, v) \leq \beta \|v\|_{\mathcal{H},\rho}^2$$

III.3.a Compacité asymptotique

On notera
$$\mathcal{L}^2 = \bigsqcup L^2\big(B_\rho(1), \mu_\rho\big)$$

Lemme $\mathbb{III}$**.29 (Lemme pivot).**
Soit un filet $(u_\rho)_\rho$*, avec* $u_\rho \in D^0_\rho\big(B_\rho(1)\big)$ *pour tout* ρ*, s'il existe une constante* C *telle que pour tout* $\rho > 0$ *on ait*
$$\|u_\rho\|^2_{\mathcal{H},\rho} \leq C$$
alors ce filet admet un sous-filet fortement convergent dans $\mathcal{L}^2$.

Preuve. Soit $B = \cup_\rho B_\rho(1)$, on va montrer que la convergence forte dans $L^2(B, \mu_\infty)$ implique la convergence forte dans $\mathcal{L}^2$. Le théorème $\mathbb{III}$.25 permettant de conclure.

Remarquons qu'en raison de la périodicité (i.e. l'invariance par l'action à gauche d'un sous-groupe co-compact Γ) on a l'existence de constantes α et β telles que (cf. définition $\mathbb{III}$-16)
$$\alpha\|v\|_{\mathcal{H},\infty} \leq \|v\|_{\mathcal{H},\rho} \leq \beta\|v\|_{\mathcal{H},\infty}$$
Commençons par prendre un filet (u_ρ) et supposons qu'il converge fortement dans $L^2(B, \mu_\infty)$, vers u_∞ (on suppose bien sûr que $u_\rho \in D^0_\rho\big(B_\rho(1)\big)$ pour tout ρ car cela suffit) alors on considère une suite de fonctions $(c_k)_{k\in\mathbb{N}}$ où $c_k \in C^\infty_0\big(B_\infty(1)\big)$, pour tout k, qui converge fortement vers u_∞, fixons k et remarquons que pour ρ suffisamment grand son support sera dans $B_\rho(1)$ or
$$\|c_k - u_\rho\|_{\mathcal{H},\rho} \leq \beta\|c_k - u_\infty\|_{\mathcal{H},\infty} + \beta\|u_\infty - u_\rho\|_{\mathcal{H},\infty}$$
soit $\varepsilon > 0$ alors pour k suffisamment grand $\beta\|c_k - u_\infty\|_{\mathcal{H},\infty} \leq \varepsilon$. On le fixe puis on choisit ρ pour faire tendre le second terme vers 0.

Pour conclure il faut remarquer que, par hypothèse, le filet (u_ρ) est borné dans $D^0(B, \mu_\infty)$ ce qui nous permet, en appliquant le théorème $\mathbb{III}$.25, d'en extraire un sous-filet fortement convergent dans $L^2(B, \mu_\infty)$, et donc dans $\mathcal{L}^2$, par ce qui précède. ❑

Dans tout ce qui suit on notera la structure spectrale sur L^2_ρ, pour $\rho \in \overline{\mathbb{R}}$, donnée par Δ_ρ comme suit
$$\Sigma_\rho = \{\Delta_\rho, \mathcal{E}_\rho, E_\rho, (T^\rho_t)_{t\in\mathbb{R}^+}, (R^\rho_\mu)_{\mu<0}\}$$

III.3.b Preuve énergétique

Pour une algèbre de Lie nilpotente, l'exponentielle est un difféomorphisme entre l'algèbre et le groupe de Lie. On note ln son inverse et X^*_i le duale du champ de vecteur X_i (cf. paragraphe I.1.c). Soit $\varphi_i : G \mapsto \mathbb{R}$ définie par $\varphi_i(g) = X_i^* \ln(g)$, alors en vertu de la formule de Campbell-Haussdorff, i.e.

$$\ln(x * y) = \ln(x) + \ln(y) + \frac{1}{2}\big[\ln(x), \ln(y)\big] + C(x, y)$$

où $C(x, y) \in \mathfrak{u}^3$, pour $i = 1, \ldots, d_1$ on a :

$$X_i^* \ln(x * y) = X_i^* \ln(x) + X_i^* \ln(y)$$

autrement dit, φ_i pour $i = 1, \ldots, d_1$ est un morphisme de groupe, de sorte que $d\varphi_i$ est invariante à gauche, i.e. $d\varphi_{i\,|\gamma * g} \cdot dl_{\gamma\,|g} = d\varphi_{j\,|g}$ d'où

$$X_i \cdot \varphi_j = d\varphi_{j\,|g} \cdot X_i(g) = d\varphi_{j\,|e} \cdot X_i(e) = X_j^* \cdot X_i = \delta_{ij}$$

Autrement dit, si on utilise les coordonnées exponentielles en prenant comme base de V_1 la base $X_1, \ldots, X_{d_1}$, le calcul que l'on vient de faire exprime le fait que, pour tout $i, j = 1, \ldots, d_1$,

$$X_i \cdot x_j = \delta_{ij}$$

Soit $\lambda > 0$ et considérons G_λ^ρ l'opérateur de L_ρ^2 dans $D_\rho^0\big(B_\rho(1)\big) \subset L_\rho^2$ déterminé par

$$a_\lambda^\rho(G_\lambda^\rho f, \phi) = (f, \phi)_\rho \quad \forall \phi \in D_\rho^0\big(B_\rho(1)\big). \tag{$\mathbb{III}$-17}$$

On veut montrer que les opérateurs (G_λ^ρ) convergent dans $\mathcal{L}^2$ compactement vers l'opérateur G_λ correspondant au problème homogénéisé :

$$a_\lambda^\infty(G_\lambda f, \phi) = (f, \phi)_\infty \quad \forall \phi \in D_\infty^0(B_\infty(1), \mu_\infty) \tag{$\mathbb{III}$-18}$$

avec $(f, \phi)_\infty = \int_{B_\infty(1)} f\phi \, d\mu_\infty$ et

$$a_\lambda^\infty(u, v) = \int_{B_\infty(1)} \langle \varpi_i, \varpi_j \rangle_2 \; X_i \cdot u \; X_j \cdot v \; d\mu_\infty + \lambda(u, v)_\infty.$$

En d'autres termes on veut montrer le théorème suivant :

Théorème $\mathbb{III}$.30.
Pour tout $\lambda < 0$, le filet des résolvantes $(R_\lambda^\rho)_\rho$ associées aux laplaciens (Δ_ρ) converge compactement vers R_λ^∞, la résolvante de Δ_∞ correspondant au problème homogénéisé. Ce qui induit la convergence compacte du filet de structures spectrales (Σ_ρ) vers Σ_∞.

Preuve. l'énoncé traduit le fait que $R_\lambda^\rho = -G_{-\lambda}^\rho$ et $R_\lambda^\infty = -G_{-\lambda}$.

Première étape :

Considérons donc f_ρ un filet convergeant faiblement vers f dans $\mathcal{L}^2$, ce filet est donc uniformément borné $\mathcal{L}^2$ et donc $(D_\rho^0)'$, le dual de D_ρ^0.

Soit donc $f_\rho \in D_\rho^0$ alors, par ($\mathbb{III}$.28), on a :

$$\alpha \| G_\lambda^\rho f_\rho \|_{\mathcal{H},\rho}^2 \le (f_\rho, G_\lambda^\rho f_\rho)_\rho \le K \| f_\rho \|_{(D_\rho^0)'} \| G_\lambda^\rho f_\rho \|_{\mathcal{H},\rho}$$

en sorte que

$$\|G_\lambda^\rho f_\rho\|_{\mathcal{H},\rho} \leq C\|f_\rho\|_{(D_\rho^0)'}$$

le filet $(G_\lambda^\rho f_\rho)$ étant uniformément borné pour les normes $\|\cdot\|_{\mathcal{H},\rho}$, par le lemme pivot $\mathbb{III}$.29 on peut en extraire un sous-filet convergeant fortement dans $\mathcal{L}^2$. i.e.

$$u_\rho = G_\lambda^\rho f_\rho \longrightarrow u_\lambda^* \text{ fortement dans } \mathcal{L}^2 \tag{$\mathbb{III}$-19}$$

De plus $P_\rho = (g_\rho^{ij})\nabla_{\mathcal{H}} G_\lambda^\rho f_\rho$ est lui aussi borné dans $\mathcal{L}^2$ en sorte que le filet P_ρ admet un sous-filet qui converge dans $\mathcal{L}^2$ vers $P_\lambda^* \in L_\infty^2$ faiblement. Pour tout $\phi_\infty \in L_\infty^2$ prenons un filet ϕ_ρ convergeant fortement vers ϕ_∞ dans $\mathcal{L}^2$ alors

$$\begin{aligned}&\int_{B_\rho(1)} P_\rho \cdot \nabla_{\mathcal{H}}\phi_\rho \, d\mu_\rho + \lambda(G_\lambda^\rho f_\rho, \phi_\rho)_\rho = (f_\rho, \phi_\rho)_\rho \longrightarrow \\ &\int_{B_\infty(1)} P_\lambda^* \cdot \nabla_{\mathcal{H}}\phi_\infty \, d\mu_\infty + \lambda(u_\lambda^*, \phi_\infty)_\infty = (f, \phi_\infty)_\infty.\end{aligned} \tag{$\mathbb{III}$-20}$$

Il suffit donc de montrer que $P_\lambda^* = \big(\langle\varpi_i, \varpi_j\rangle_2\big)\nabla_{\mathcal{H}} u_\lambda^*$ sur $B_\infty(1)$ car cela montrera que $u_\lambda^* = G_\lambda f$.

Deuxième étape :

On commence par prendre $\chi^k(y) \in D_\rho$ (cf. construction par l'équation $\mathbb{III}$-11) en lui demandant d'être de moyenne nulle sur un domaine fondamental (pour fixer la constante), et on définit

$$w_\rho(x) = x_k - \frac{1}{\rho}\chi^k(\rho x)$$

pour $k = 1, \ldots, d_1$. Ainsi

$$w_\rho \to x_k \text{ fortement dans } \mathcal{L}^2. \tag{$\mathbb{III}$-21}$$

et par définition de χ^k on a

$$\Delta_\rho w_\rho = 0 \text{ sur } B_\infty(1). \tag{$\mathbb{III}$-22}$$

En multipliant cette expression par une fonction test $\phi \in D_\rho^0\big(B_\rho(1)\big)$ et en intégrant on obtient

$$\int_{B_\rho(1)} g_\rho^{ij} \; X_j \cdot w_\rho \; X_i \cdot \phi \, d\mu_\rho = 0 \tag{$\mathbb{III}$-23}$$

Soit $\varphi \in C_0^\infty(B_\infty(1))$ (remarquons que, pour ρ suffisamment grand, le support de φ sera dans $B_\rho(1)$). On prend alors $\phi = \varphi w_\rho$ que l'on injecte dans ($\mathbb{III}$-17), et dans ($\mathbb{III}$-23) on injecte $\phi = \varphi u_\rho$, puis on soustrait les deux équations pour obtenir

$$\begin{aligned}&\int_{B_\rho(1)} g_\rho^{ij} \left(X_j \cdot u_\rho \; X_i \cdot \varphi \; w_\rho - X_j \cdot w_\rho \; X_i \cdot \varphi \; u_\rho\right) \, d\mu_\rho \\ &\qquad = \int_{B_\rho(1)} f_\rho w_\rho \varphi \, d\mu_\rho - \lambda \int_{B_\rho(1)} \varphi u_\rho w_\rho \, d\mu_\rho.\end{aligned} \tag{$\mathbb{III}$-24}$$

Maintenant, en faisant tendre $\rho \to \infty$ dans ($\mathbb{III}$-24), tous les termes convergent car ils sont le produit d'un terme qui converge fortement et d'un terme qui converge faiblement dans $\mathcal{L}^2$. Plus précisément

- P_ρ définit par $P_{\rho,i} = g_\rho^{ij} X_j u_\rho$ converge faiblement vers P_λ^* dans $\mathcal{L}^2$ d'après ($\mathbb{III}$-20) ;
- $X_i \cdot \varphi w_\rho$ converge fortement vers $X_i \cdot \varphi x_k$ dans $\mathcal{L}^2$ en vertu de ($\mathbb{III}$-21)
- $g_\rho^{ij} X_i \cdot w_\rho$ est D_Γ/ρ-périodique et tend faiblement $\mathcal{L}^2$ vers sa valeur moyenne

$$\langle \varpi_j, \varpi_k \rangle_2 = \mathfrak{M}\Big(g^{ij}(y)\Big(\delta_{ik} - X_i \cdot \chi^k(y)\Big)\Big)$$

- $X_j \cdot \varphi u_\rho$ converge fortement vers $X_j \cdot \varphi u_\lambda^*$ par ($\mathbb{III}$-19), puisque φ est à support compact.
- Quant au membre de droite, w_ρ converge fortement, tout comme u_ρ et f_ρ converge faiblement vers f.

En résumé $\mathbb{III}$-24 converge vers (on note $P_{\lambda,i}^*$ les coordonnées de P_λ^*)

$$\int_{B_\infty(1)} \big(P_{\lambda,j}^* x_k - \langle \varpi_j, \varpi_k \rangle_2 u_\lambda^*\big) X_j \cdot \varphi \, d\mu_\infty = \int_{B_\infty(1)} f x_k \varphi \, d\mu_\infty - \lambda \int_{B_\infty(1)} \varphi u_\lambda^* x_k \, d\mu_\infty. \tag{$\mathbb{III}$-25}$$

Si, de plus, on injecte dans l'équation ($\mathbb{III}$-20), $\phi_\infty = \varphi x_k$ cela donne

$$\int_{B_\infty(1)} f x_k \varphi \, d\mu_\infty - \lambda \int_{B_\infty(1)} \varphi u_\lambda^* x_k \, d\mu_\infty = \int_{B_\infty(1)} P_{\lambda,j}^* X_j \cdot (\varphi x_k) \, d\mu_\infty \tag{$\mathbb{III}$-26}$$

de sorte que, en combinant ($\mathbb{III}$-25) et ($\mathbb{III}$-26), on obtient, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty\big(B_\infty(1)\big)$, l'égalité suivante :

$$\int_{B_\infty(1)} \big(P_{\lambda,j}^* x_k - \langle \varpi_j, \varpi_k \rangle_2 u^*\big) X_j \cdot \varphi \, d\mu_\infty = \int_{B_\infty(1)} P_{\lambda,j}^* X_j \cdot (\varphi x_k) \, d\mu_\infty$$

qui se traduit, au sens des distributions, par l'égalité (en effet $\int X_j \cdot \varphi u = -\int \varphi X_j \cdot u$ pour des fonctions tests) :

$$-\sum_{j=1}^{d_1} X_j \cdot \big(P_{\lambda,j}^* x_k - \langle \varpi_j, \varpi_k \rangle_2 u_\lambda^*\big) = -\sum_{j=1}^{d_1} X_j \cdot P_j^* \, x_k \Leftrightarrow P_{\lambda,k}^* = \sum_{j=1}^{d_1} \langle \varpi_j, \varpi_k \rangle_2 \; X_j \cdot u_\lambda^*$$

ce qui nous permet de conclure à l'égalité $u_\lambda^* = G_\lambda f$. ❑

On peut à présent terminer la preuve du théorème $\mathbb{III}$.19, celui-ci est simplement dû au théorème $\mathbb{III}$.30 qui nous permet d'appliquer le corollaire $\mathbb{III}$.17.bis. Enfin la propriété $\mathbb{III}$.8 permet de conclure.

Remarque $\mathbb{III}$.31. Tout ce qui a été fait dans ce chapitre pour une métrique sous-riemannienne peut être fait pour une métrique riemannienne. Dans ce cas on observe la convergence du spectre des laplaciens (Δ_ρ) vers le spectre du laplacien de Kohn associé à la métrique issue du tore d'Albanese de la nilvariété. Autrement dit la famille (Δ_ρ) converge compactement vers Δ_∞ définit par (on note $\langle\cdot,\cdot\rangle_g$ le produit scalaire induit sur les 1-formes par la métrique g)

$$\Delta_\infty f = -\sum_{i,j=1}^{d_1} \frac{\langle d\eta_i, d\eta_j\rangle_g}{\mathrm{Vol}(g)} X_i X_j f$$

en prenant pour base des 1-formes harmoniques, celles déterminées par

$$\eta_i = \chi^i - x_i$$

et $\Delta\chi^i = \Delta x_i$ sur un domaine fondamental.

Il est bon de noter que le laplacien de Kohn obtenu est différent de celui que l'on obtiendrait en restreignant la métrique riemannienne sur l'horizontale pour obtenir une métrique sous-riemannienne. Voir aussi le théorème $\mathbb{IV}$.26 et les remarques qui suivent, et énonçons le théorème qui est la version riemannienne du théorème $\mathbb{III}$.19

Théorème $\mathbb{III}$.32 (Spectre asymptotique, version riemannienne).
Soit $M^n = \Gamma\backslash G$ une nilvariété graduée, munie d'une métrique riemannienne g quelconque. Notons d_g la distance riemannienne, $B_g(\rho)$ les boules centrées en l'identité, de rayon ρ, induites sur le revêtement universel et $\lambda_i\big(B_g(\rho)\big)$ la $i^{\text{ème}}$ valeur propre du laplacien pour le problème de Dirichlet sur $B_g(\rho)$.

Alors il existe un opérateur hypoelliptique Δ_∞, le laplacien de Kohn associé à une métrique sous-riemannienne invariante à gauche sur G, tel qu'en notant λ_i^∞ sa $i^{\text{ème}}$ valeur propre pour le problème de Dirichlet sur la boule unité de la distance d_∞ issue de la norme stable on ait :

$$\lim_{\rho\to\infty} \rho^2 \lambda_i\big(B_g(\rho)\big) = \lambda_i^\infty$$

Troisième chapitre

Le cas des tores

Introduction

Le but de ce chapitre est l'étude de la géométrie asymptotique des tores. Celle-ci est largement avancée notamment grâce aux travaux de D. Burago et S. Ivanov ([BI94] et [BI95]), qui leurs ont en outre permis de démontrer la conjecture de Hopf concernant les tores sans points conjugués. Dans leur article ([BI94]) D. Burago et S. Ivanov étudient le volume des grandes boules sur le revêtement universel d'un tore muni de la métrique relevée, et réussissent à caractériser les tores plats en fonction de cette grandeur asymptotique. Ici nous montrerons que nous pouvons faire de même en étudiant, non pas le volume, mais le spectre du laplacien de Dirichlet sur les boules, en utilisant la méthode introduite au chapitre $\mathbb{I}\mathbb{I}$.

Cependant bien que les tores soient des nilvariétés graduées ce sont les plus simples, ainsi les objets introduits dans la partie $\mathbb{I}\mathbb{I}$ sont simplement les objets usuels de la géométrie riemannienne. De plus les connaissances les concernant étant actuellement plus précises, cela nous permet d'obtenir des résultats plus précis concernant l'asymptotique des valeurs propres du laplacien des boules de grand rayon. On obtient par exemple le même résultat pour le spectre de Neumann que pour le spectre de Dirichlet, i.e. le fait que les valeurs propres du laplacien sur les boules admettent un équivalent lorsque le rayon tend vers l'infini.

De plus, dans la partie III, et pour le problème de Dirichlet, nous majorons la constante relative à la première valeur propre (que nous nommerons λ_1-asymptotique) intervenant dans cet équivalent, et montrons que cette majoration est optimale puisque non seulement elle est atteinte, mais de plus elle permet de caractériser les tores plats.

Il est intéressant de remarquer, que, comme pour le volume, la convergence d'une part et la majoration (minoration pour le volume) et la caractérisation du cas d'égalité d'autre part sont deux problèmes distincts. Ainsi dans leur article, D. Burago et S. Ivanov ne parlent pas de la convergence du volume asymptotique. Bien que celui-ci converge effectivement (cf. P. Pansu [Pan82] et théorème $\mathbb{I}\mathbb{I}\mathbb{I}$.6), cette convergence est obtenue indépendamment. Il n'en est pas de même pour le λ_1-asymptotique, ce sont les mêmes outils qui permettent d'obtenir les deux résultats : l'homogénéisation et la Γ-convergence.

I Homogénéisation et norme stable

On considère un tore $\mathbb{T}^n$ muni d'une métrique riemannienne g, que l'on remonte sur son revêtement universel sur lequel on la note $\tilde{g}$. De sorte que l'on oublie le tore en se ramenant à l'étude d'une métrique périodique sous l'action de $\mathbb{Z}^n$ sur $\mathbb{R}^n$. Dans ce qui suit d_g sera la distance issue de $\tilde{g}$, δ_ρ désignera l'homothétie de centre 0 et de rapport ρ et $\xi_\rho = \delta_{1/R}$ et $\varPi$ un domaine fondamental pour l'action de $\mathbb{Z}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

I.1 La norme stable

I.1.a — Dans les années 80, P. Pansu [Pan82] montrait qu'une métrique sur $\mathbb{R}^n$ issue d'un tore donnait naissance à une distance dont le comportement pour deux points très éloignés était semblable à la distance issue d'une norme. Dans les années 90, D. Burago [Bur92] montrait un résultat analogue pour une distance périodique sur $\mathbb{R}^n$ sous une action de $\mathbb{Z}^n$ par translation (i.e. $d(x+k, y+k) = d(x,y)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}^n$). C'est cette norme que l'on nomme la norme stable. Pour préciser la différence entre les deux résultats, considérons la distance à l'origine d'un point, $f_1(x) = d_g(0,x)$ et définissons $f_\rho(x) = d_g(0, \delta_\rho x)/\rho$ alors P. Pansu montre l'existence d'une norme $\|\cdot\|_s$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{\rho \to +\infty} f_\rho(x) = \|x\|_s$$

tandis que le résultat de D. Burago donne l'existence d'une constante C telle que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$

$$\left| f_\rho(x) - \|x\|_s \right| \leq \frac{C}{\rho}$$

en d'autres termes le résultat de P. Pansu est un résultat de convergence simple, tandis que celui de D. Burago est un résultat de convergence forte.

Nous donnons ici une troisième démonstration de la convergence simple des fonctions f_ρ, qui est en fait une application du théorème I.30.

Théorème III.1.
Soit $\tilde{g}$ une une métrique sur $\mathbb{R}^n$ relevée d'une métrique sur un tore $\mathbb{T}^n$, alors il existe une norme $\|\cdot\|_\infty$ telle que

1. *la suite de fonctionnelles*

$$E_\rho(u) = \int_I \tilde{g}_{(\delta_\rho u(t))}\big(u'(t), u'(t)\big)dt$$

pour tout ouvert borné I de $\mathbb{R}$ et $u \in W^{1,2}(I;\mathbb{R}^n)$, Γ-converge (au sens L^2) vers la fonctionnelle

$$E_\infty(u) = \int_I \|u'(t)\|_\infty^2 dt$$

2. *la norme vérifiant*

$$\|\xi\|_\infty^2 = \lim_{t\to+\infty} \inf\left\{\frac{1}{t}\int_0^t \tilde{g}_{(u+\xi\tau)}(u'+\xi, u'+\xi)\ d\tau\ :\ u \in W_0^{1,2}(]0,t[;\mathbb{R}^n)\right\} \qquad (\mathbb{III}\text{-}1)$$

en particulier si on note $f_\rho(x) = d_g(0, \delta_\rho x)/\rho$ *alors pour tout* $x \in \mathbb{R}^n$ *on a*

$$\lim_{\rho\to+\infty} f_\rho(x) = \|x\|_\infty = \|x\|_s.$$

Preuve. On applique le théorème $\mathbb{I}$.30 avec $f(x,s,\xi) = g_s(\xi,\xi)$. Pour cela il faut vérifier que f ainsi définie satisfait bien les hypothèses du théorème $\mathbb{I}$.30. La condition de croissance contrôlée $\mathbb{I}$-13 est vérifié en raison de la périodicité de g, ainsi il existe bien deux constantes α et β telles que pour tout s

$$\alpha|\xi|^2 \le g_s(\xi,\xi) \le \beta|\xi|^2 \qquad (\mathbb{III}\text{-}2)$$

où $|\cdot|$ est une norme euclidienne fixée. La périodicité garantit aussi les hypothèses $\mathbb{I}$-14. On obtient donc comme Γ-limite la fonctionnelle

$$E_\infty(u) = \int_I \varphi\big(u'(t)\big)dt$$

avec φ définie par $\mathbb{III}$-1. Il nous reste à montrer que φ est le carré d'une norme.

Homogénéité : Il est immédiat que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(\lambda\xi) = \lambda^2\varphi(\xi)$ (changement de variable dans $\mathbb{III}$-1).

Séparation : Faisons deux remarques :

1. L'énergie d'une courbe entre les points 0 et $t\xi$ dans un espace euclidien est minimale pour le segment de droite joignant 0 à $t\xi$, de sorte qu'en injectant une métrique euclidienne dans $\mathbb{III}$-1, on obtient cette même métrique euclidienne.
2. Considérons deux métriques h et g telles que

$$g_s(\xi,\xi) \le h_s(\xi,\xi),$$

pour tout s et ξ, alors, pour tout $u \in W_0^{1,2}(]0,t[;\mathbb{R}^n)$, on a :

$$\frac{1}{t}\int_0^t g_{(u+\xi\tau)}(u'+\xi, u'+\xi)\ d\tau \le \frac{1}{t}\int_0^t h_{(u+\xi\tau)}(u'+\xi, u'+\xi)\ d\tau \qquad (\mathbb{III}\text{-}3)$$

de sorte qu'en passant aux infima suivant u et à la limite sur t on obtient :

$$\lim_{t\to+\infty} \inf\left\{\frac{1}{t}\int_0^t g_{(u+\xi\tau)}(u'+\xi, u'+\xi)\ d\tau\ :\ u \in W_0^{1,2}(]0,t[;\mathbb{R}^n)\right\} \le$$
$$\lim_{t\to+\infty} \inf\left\{\frac{1}{t}\int_0^t h_{(u+\xi\tau)}(u'+\xi, u'+\xi)\ d\tau\ :\ u \in W_0^{1,2}(]0,t[;\mathbb{R}^n)\right\}. \qquad (\mathbb{III}\text{-}4)$$

Appliquons ces deux remarques à l'inégalité III-2 soit $\alpha|\xi|^2 \leq \tilde{g}_s(\xi,\xi) \leq \beta|\xi|^2$. Ceci nous donne donc

$$\alpha|\xi|^2 \leq \varphi(\xi) \leq \beta|\xi|^2$$

de sorte que $\varphi(\xi) = 0$ si et seulement si $\xi = 0$.

Inégalité triangulaire : Il suffit de remarquer que

$$\{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \varphi(\xi) \leq 1\} = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \sqrt{\varphi(\xi)} \leq 1\} = S_n$$

Ainsi si $\sqrt{\varphi}(\xi) = 1 = \varphi(\xi)$ et $\sqrt{\varphi}(\eta) = 1 = \varphi(\eta)$ alors, pour tout $0 \leq \lambda \leq 1$, la convexité de φ (cf. remarque I.31) donne

$$\varphi(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta) \leq \lambda\varphi(\xi) + (1-\lambda)\varphi(\eta) = 1$$

on en déduit

$$\sqrt{\varphi}(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta) \leq 1$$

Donc, pour tous x, y non nulles, on a

$$\sqrt{\varphi}\Big(\lambda\frac{x}{\sqrt{\varphi(x)}} + (1-\lambda)\frac{y}{\sqrt{\varphi(y)}}\Big) \leq 1$$

de sorte qu'en prenant $\lambda = \frac{\sqrt{\varphi(x)}}{\sqrt{\varphi(x)}+\sqrt{\varphi(y)}}$ et en utilisant l'homogénéité de $\sqrt{\varphi}$ on a bien l'inégalité triangulaire et donc $\|\cdot\|_\infty = \sqrt{\varphi}(\cdot)$ est bien une norme.

Quant à la remarque finale, elle provient du fait que $\|\xi\|_\infty^2$ est la limite de l'infimum des énergies des courbes entre 0 et ξ pour la métrique

$$(s,\xi) \to (1/t^2)g_{\delta_t s}(d\delta_{t|s}\cdot\xi, d\delta_{t|s}\cdot\xi)$$

(soit $g_{ts}(\xi,\xi)$ en faisant les identifications usuelles entre $\mathbb{R}^n$ et son fibré tangent) qui est atteint le long des géodésiques. ❏

Remarque III.2. Ce théorème exprime le fait que l'énergie le long d'une courbe dont les extrémités sont très éloignées dans $(\mathbb{R}^n, g)$ est équivalente à l'énergie de la même courbe pour $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_s^2)$. On peut remarquer que cela est encore vrai pour des métriques à coefficients (g_{ij} dans une base de $\mathbb{R}^n$) bornés et mesurables.

Exemple III.3. Soit $n = 2$ et soit la métrique définie dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$ par $g_{ij}(x) = a(x)\delta_{ij}$ où $a : \mathbb{R}^2 \to \{\alpha,\beta\}$ est $\mathbb{Z}^2$ périodique,$4\alpha \leq \beta$ et sur $[0,1[^2$

$$a(x) = \begin{cases} \beta & \text{si } x \in]0,\frac{1}{2}[\times]\frac{1}{2},1[\text{ ou } x \in]\frac{1}{2},1[\times]0,\frac{1}{2}[\,; \\ \alpha & \text{sinon.} \end{cases}$$

alors (cf. [BD98] exemple 16.2)

$$\|\xi\|_\infty^2 = \alpha\Big((\sqrt{2}-1)\min\{|\xi_1|,|\xi_2|\} + \max\{|\xi_1|,|\xi_2|\}\Big)^2$$

Le résultat suivant, bien que simple, mérite d'être cité

Corollaire $\mathbb{III}$.1.bis
Pour tout x et $y \in \mathbb{R}^n$ on a

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{d_g(\delta_\rho x, \delta_\rho y)}{\rho} = \|x-y\|_s$$

Preuve. Comme on l'a remarqué dans le théorème précédent, pour toute norme euclidienne, il existe α et β telles, que pour tout x et $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\alpha|x-y| \leq d_g(x,y) \leq \beta|x-y| \qquad (\mathbb{III}\text{-}5)$$

Soit x^* et y^* les points du réseau de l'action de $\mathbb{Z}^n$ les plus proches de x et y respectivement alors

$$\begin{aligned} d_g(x,y) &\leq d_g(x,x^*) + d_g(x^*,y) \\ &= d_g(x,x^*) + d_g(y-x^*,0) \\ &\leq d_g(x,x^*) + d_g(y-x^*,y-x) + d_g(y-x,0) \qquad (\mathbb{III}\text{-}6) \end{aligned}$$

alors, il existe une constante C telle que, pour tout x, on ait $d_g(x,x^*) \leq C$, de sorte qu'en utilisant ($\mathbb{III}$-5)

$$d_g(y-x^*,y-x) \leq \frac{\beta}{\alpha} d_g(x-x^*,0) = \frac{\beta}{\alpha} d_g(x,x^*)$$

en combinant cela à l'inégalité ($\mathbb{III}$-6) on a

$$d_g(x,y) \leq d_g(x-y,0) + C(1+\beta/\alpha).$$

Enfin on remarque que

$$d_g(y-x,0) - d_g(y-x^*,y-x) \leq d_g(y,x^*) \leq d_g(y,x) + d_g(x,x^*)$$

de sorte que

$$d_g(x,y) \geq d_g(x-y,0) - C(1+\alpha/\beta)$$

on en déduit aisément que $d_g(\delta_\rho x, \delta_\rho y)$ est équivalent à $d_g(\delta_\rho(x-y),0)$ quand $\rho \to +\infty$. ❑

I.1.b — Transposons les résultats concernant la convergence des compacts et des boules dans le cadre des tores. Tout d'abord le théorème $\mathbb{II}$.5 devient dans ce cas :

Théorème $\mathbb{III}$.4.
Soient $(\mathbb{T}^n, g)$ un tore, d_g la distance induite sur $\mathbb{R}^n$, $d_\rho(x,y) = d_g(\delta_\rho(x), \delta_\rho(y))/\rho$ et d_∞ la distance issue de la norme stable induite. Soit A un compact de $\mathbb{R}^n$ alors la suite $(A, d_\rho, \mu_\rho)_\rho$ converge au sens de Gromov-Hausdorff mesuré vers $(A, d_\infty, \mu_\infty)$.

Ensuite le théorème $\mathbb{II}$.6 se transpose ainsi :

Théorème $\mathbb{III}$.5.
Soient $(\mathbb{T}^n, g)$ un tore, d_g la distance induite sur $\mathbb{R}^n$, $d_\rho(x,y) = d_g\big(\delta_\rho(x), \delta_\rho(y)\big)/\rho$ et d_∞ la distance issue de la norme stable induite. Soit $B_\rho(1)$ la boule unité de d_ρ, alors la suite $(B_\rho(1), d_\rho, \mu_\rho)_\rho$ converge au sens de Gromov-Hausdorff mesuré vers $(B_\infty(1), d_\infty, \mu_\infty)$.

Enfin le corollaire sur le volume asymptotique devient ici :

Théorème $\mathbb{III}$.6.
Si on note μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ alors

$$\lim_{\rho\to\infty} \frac{Vol_g\big(B_g(\rho)\big)}{\rho^n} = Vol_g(\mathbb{T}^n)\frac{\mu\big(B_\infty(1)\big)}{\mu(Д)} = \mu_\infty\big(B_\infty(1)\big) \qquad (\mathbb{III}\text{-}7)$$

Remarque $\mathbb{III}$.7. La démonstration de ce dernier résultat est incluse dans les théorèmes concernant le volume asymptotique riemannien des nilvariétés de P. Pansu [Pan83].

I.2 Homogénéisation du laplacien et variété de Jacobi

Rappelons comment on obtient l'opérateur homogénéisé ; on commence par chercher la solution périodique unique χ^i (à une constante additive près) de

$$\Delta\,\chi^i = \Delta\,x_i \quad \text{sur } Д \qquad (\mathbb{III}\text{-}8)$$

l'opérateur Δ_∞ est alors défini par

$$\Delta_\infty\, f = -\frac{1}{\mathrm{Vol}(g)}\left(\int_Д g^{ij} - g^{ik}\frac{\partial\chi^j}{\partial y_k}\, d\mu_g(y)\right)\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \qquad (\mathbb{III}\text{-}9)$$

en notant $\eta_j(x) = \chi^j(x) - x_j$ l'application harmonique associée et

$$q^{ij} = \frac{1}{\mathrm{Vol}(g)}\left(\int_Д g^{ij} - g^{ik}\frac{\partial\chi^j}{\partial y_k}\, d\mu_g(y)\right)$$

on peut remarquer que les $d\eta_i$ sont des 1-formes sur le tore sous-jacent. Ce qui nous donne dans ce cas

Propriété $\mathbb{III}$.8.
Notons $\langle\cdot,\cdot\rangle_2$ le produit scalaire induit sur les 1-formes du tore par la métrique g alors

$$q^{ij} = \frac{1}{\mathrm{Vol}(g)}\langle d\eta_i, d\eta_j\rangle_2 = \frac{1}{\mathrm{Vol}(g)}a^1(\eta_j, \eta_i) = q^{ji}$$

de sorte que Δ_∞ est bien un opérateur elliptique.

Remarque $\mathbb{III}$.9. Au lieu de prendre une métrique riemannienne on peut considérer une métrique finslérienne et lui associer le laplacien défini par P. Centore [Cen00]. On peut alors refaire ce qui vient d'être fait (partie I.1 et ci-dessus) dans ce cadre là.

Ainsi (q^{ij}) induit un produit scalaire sur les 1-formes harmonique, (dont on notera $\|\cdot\|_2$ la norme), et par passage au quotient sur $H^1(\mathbb{T},\mathbb{R})$. En effet les $(d\eta_i)$ peuvent être vues comme des 1-formes harmoniques sur le tore. Comme elles sont indépendantes on peut aussi les voir comme une base de $H^1(\mathbb{T},\mathbb{R})$ (théorème de Hodge). Par dualité on obtient un produit scalaire (q_{ij}) sur $H_1(\mathbb{T},\mathbb{R})$ (on notera $\|\cdot\|_2^*$ la norme induite). A présent il est normal de s'intéresser au lien entre la norme stable $\|\cdot\|_s$ et $\|\cdot\|_2^*$. Pour cela retournons sur $H^1(\mathbb{T},\mathbb{R})$, la norme duale à la norme stable est obtenue en quotientant la norme infinie (cf. Pansu [Pan99] lemme 17) que l'on note $\|\cdot\|^\infty$, et la norme $\|\cdot\|_2$ induite par (q^{ij}) est obtenue à partir de la norme L^2 normalisée. En combinant l'inégalité de Hölder et le théorème de Hodge on obtient :

Propriété $\mathbb{III}$.10.
Pour toute 1*-forme* α *on a*

$$\|\alpha\|_2 \leq \|\alpha\|^\infty$$

de sorte que, par dualité, pour tout $\gamma \in H_1(\mathbb{T},\mathbb{R})$,

$$\|\gamma\|_s \leq \|\gamma\|_2^*$$

en particulier la boule unité de $\|\cdot\|_2^*$ *est incluse dans* $B_\infty(1)$.

Enfin pour terminer remarquons que la variété $H_1(\mathbb{T},\mathbb{R})/H_1(\mathbb{T},\mathbb{Z})$ muni de la métrique plate, obtenue en faisant le quotient de $\big(H_1(\mathbb{T},\mathbb{R}),\|\cdot\|_2^*\big)$, est ce que l'on appelle la variété de Jacobi ou tore d'Albanese du tore $(\mathbb{T},g)$.

I.3 Spectre asymptotique

I.3.a Remarque sur les espaces étudiés

Soit $\tilde{g}$ une métrique sur $\mathbb{R}^n$ relevée d'une métrique sur un tore, et $(g_\rho)_\rho$ la famille des métriques ré-échelonnées. Notons $d\mu_g(x) = \det^{\frac{1}{2}}\tilde{g}(x)dx$ la mesure associée à $\tilde{g}$ alors $d\mu_\rho(x) = \det^{\frac{1}{2}}\tilde{g}(\delta_\rho x)dx$ est la mesure associée à g_ρ. Passons aux espaces en notant $H^1_\rho\big(B_\rho(1)\big)$ (il faut comprendre la boule ouverte ici)

$$H^1_\rho\big(B_\rho(1)\big) = \left\{ v \,\middle|\, v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial v}{\partial x_n} \in L^2\big(B_\rho(1), d\mu_\rho\big) \right\} \qquad (\mathbb{III}\text{-}10)$$

muni de la norme

$$\|v\|_\rho^2 = |v|_\rho^2 + \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|_\rho^2 \qquad \text{resp. } \|v\|_\infty^2 = |v|_\infty^2 + \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|_\infty^2 \Bigg)$$

où l'on a noté

$$|v|_\rho^2 = \int_{B_\rho(1)} v^2 d\mu_\rho \quad \left(\text{resp. } |v|_\infty^2 = \int_{B_\infty(1)} v^2 d\mu_\infty\right). \qquad (\mathbb{III}\text{-}11)$$

Le produit scalaire dans $L^2\big(B_\rho(1), \mu_\rho\big)$ est une fois de plus

$$(u, v)_\rho = \int_{B_\rho(1)} uv \, d\mu_\rho \qquad (\mathbb{III}\text{-}12)$$

$H^1_\rho\big(B_\rho(1)\big)$ est un espace de Hilbert. On définit de manière usuelle $H^1_{\rho,0}\big(B_\rho(1)\big)$ comme la fermeture des fonctions $C^\infty\big(B_\rho(1)\big)$ à support compact, dans $H^1_\rho\big(B_\rho(1)\big)$ pour la norme $\|\cdot\|_\rho$. On a alors

$$H^1_{\rho,0}(B_\infty(1)) = \Big\{v \mid v \in H^1_\rho\big(B_\rho(1)\big) \text{ telle que } v = 0 \text{ sur } \partial B_\rho(1)\Big\}$$

Pour se ramener aux notations de $\mathbb{II}$,

$$D_\rho\big(B_\rho(1)\big) = H^1_\rho\big(B_\rho(1)\big) \qquad \text{et} \qquad D^0_\rho\big(B_\rho(1)\big) = H^1_{\rho,0}\big(B_\rho(1)\big)$$

Pour ce qui suit V_ρ sera un sous-espace fermé tel que

$$H^1_{\rho,0}\big(B_\rho(1)\big) \subset V_\rho \subset H^1_\rho\big(B_\rho(1)\big).$$

On peut définir un filet de structures spectrales en étendant le laplacien défini sur V_ρ à L^2_ρ. La question que l'on peut se poser est de savoir si on a encore convergence de ce filet de structures spectrales. Une lecture attentive de la démonstration du théorème $\mathbb{II}$.30 montre que pour pouvoir faire la même démonstration, il suffit que l'espace V_ρ s'injecte compactement dans L^2_ρ. Or dans le cas particulier présent, $H^1_\rho\big(B_\rho(1)\big)$ s'injecte compactement dans L^2_ρ. De sorte que cela est vrai pour tout sous-espace muni de la même norme ; notamment cela est vrai pour $H^1_\rho\big(B_\rho(1)\big)$. Autrement dit, tout ce qui a été fait dans le cadre général uniquement pour le laplacien avec les conditions de Dirichlet au bord, peut être fait dans le cadre des tores, pour le laplacien avec les conditions de Neumann au bord (ce que l'on ne peut pas encore faire dans le cas des nilvariétés car on ne dispose pas — pour le moment — d'injection compacte du même type).

I.3.b Énoncé des résultats

Le théorème $\mathbb{II}$.19 devient dans ce cas

Théorème $\mathbb{III}$.11.
Soient $(\mathbb{T}^n, g)$ un tore, $B_g(\rho)$ les boules riemanniennes, de rayon ρ centrées en un point fixe, induites sur le revêtement universel, $\lambda_i\big(B_g(\rho)\big)$ la $i^{ème}$ valeur propre du laplacien pour les conditions de Dirichlet ou Neumann au bord sur $B_g(\rho)$.

Alors il existe un opérateur elliptique Δ_∞, qui n'est autre que le laplacien associé à un produit euclidien sur $\mathbb{R}^n$, tel qu'en notant λ_i^∞ sa $i^{ème}$ valeur propre pour les conditions de Dirichlet ou Neumann au bord de la boule unité de la norme stable $B_\infty(1)$ on ait

$$\lim_{\rho\to\infty} \rho^2 \lambda_i\big(B_g(\rho)\big) = \lambda_i^\infty$$

II Retour sur la Γ-convergence

II.1 Γ et Mosco-convergence des formes quadratiques

Nous sommes maintenant en mesure de donner une version adaptée à notre problème de la Γ-convergence

Définition III.12 (Γ-convergence).
On dira qu'un filet $\{F_\alpha : L^2_\alpha \to \overline{\mathbb{R}}\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de fonctions *Γ-converge vers une fonction* $F : L^2_\infty \to \overline{\mathbb{R}}$ si, et seulement si, les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(F1) Si un filet $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \in L^2_\alpha$ converge fortement vers $u \in L^2_\infty$ dans $\mathcal{L}^2$ alors

$$F(u) \leq \liminf_\alpha F_\alpha(u_\alpha);$$

(F2) Pour tout $u \in L^2_\infty$ il existe un filet $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}} \in L^2_\alpha$ qui converge fortement vers u dans $\mathcal{L}^2$ et tel que

$$F(u) = \lim_\alpha F_\alpha(u_\alpha).$$

Remarque III.13. Ceci diffère légèrement de la définition usuelle, mais on peut s'y ramener facilement en prolongeant tous les F_α par l'infini sur $\mathcal{L}^2$ (voir l'introduction de [Mas93]).

Résumons à présent un certain nombre de propriétés de cette convergence.

Lemme III.14. *1. Si un filet $\{F_\alpha : L^2_\alpha \to \overline{\mathbb{R}}\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de fonction Γ-converge vers une fonction $F : L^2_\infty \to \overline{\mathbb{R}}$, alors F est semi-continue inférieurement.*

2. Si un filet $(\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de formes quadratiques $\mathcal{E}_\alpha$ sur L^2_α Γ-converge vers une fonction $F : L^2_\infty \to \overline{\mathbb{R}}$, alors F est identifié à une forme quadratique sur L^2_∞.

On a aussi le théorème de compacité suivant :

Théorème III.15.
Tout filet $(\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de formes quadratiques $\mathcal{E}_\alpha$ sur L^2_α admet un sous-filet Γ-convergeant, dont la limite est une forme quadratique sur L^2_∞.

Remarque III.16. En fait ce théorème est vrai dans un espace de fonctions plus grand, sous certaines conditions sur $\{L^2_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$. Bien sûr la limite n'est pas nécessairement une forme quadratique dans ce cas là. Ici c'est le lemme III.14 qui nous permet de parler de l'aspect de la limite.

Définition III.17 (topologie de Mosco).
Nous dirons qu'un filet $(\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$ de formes quadratiques $\mathcal{E}_\alpha$ sur L^2_α *Mosco-converge* vers $\mathcal{E}$ forme quadratique sur L^2_∞ si la condition (F2) de la définition III.12 et (F1') sont vérifiés :

(F1') Si un filet $(u_\alpha)_{\alpha \in \mathcal{A}}$, $u_\alpha \in L^2_\alpha$ converge faiblement vers $u \in L^2_\infty$ dans $\mathcal{L}^2$ alors

$$\mathcal{E}(u) \leq \liminf_\alpha \mathcal{E}_\alpha(u_\alpha)$$

La topologie induite sera appelée *topologie de Mosco.*

Il est clair que la Mosco-convergence implique la Γ-convergence, de sorte que cette topologie est plus forte que la Γ-topologie. Il nous reste à introduire un dernier type de convergence :

Définition $\mathbb{III}$.18 (Γ-convergence compacte).
Nous dirons que le filet $(\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ Γ-*converge compactement* vers $\mathcal{E}$ si $\mathcal{E}_a \to \mathcal{E}$ au sens de Mosco et si $(\mathcal{E}_a)_{a\in\mathcal{A}}$ est asymptotiquement compact.

Précisons à présent le lien entre la Mosco-convergence et la Γ-convergence.

Lemme $\mathbb{III}$.19.
Supposons que $(\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ est asymptotiquement compact alors $(\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ Γ-converge vers $\mathcal{E}$ si et seulement si $(\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha\in\mathcal{A}}$ Mosco-converge vers $\mathcal{E}$.

Preuve. Il suffit de montrer que la Γ-convergence implique l'hypothèse $(F1')$ de $\mathbb{III}$.17. On procède par l'absurde en supposant l'existence d'un filet (u_α) faiblement convergeant tel que $\liminf_\alpha \mathcal{E}_\alpha(u_\alpha) < \mathcal{E}(u)$. Quitte à extraire un sous-filet on peut supposer que $\lim \mathcal{E}_\alpha(u_\alpha) < \mathcal{E}(u)$ de sorte que l'on a aussi $\limsup_\alpha \mathcal{E}_\alpha(u_\alpha) + \|u_\alpha\|_\alpha^2 < +\infty$. Il est facile de voir que la compacité asymptotique passe à un sous-filet, on peut donc extraire un sous-filet $u_{\alpha(\beta)}$ qui converge fortement. L'hypothèse de Γ-convergence passant aussi aux sous-filets de $\mathcal{E}_\alpha$ on obtient

$$\lim \mathcal{E}_\alpha(u_\alpha) = \lim_\beta \mathcal{E}_{\alpha(\beta)}(u_{\alpha(\beta)}) \geq \mathcal{E}(u)$$

ce qui est absurde. ❑

II.2 Structures spectrales et Γ-convergence

On revient sur les structures spectrales afin d'énoncer le théorème suivant :

Théorème $\mathbb{III}$.20.
Soit (Σ_α) un filet de structures spectrales sur les L^2_α et Σ une structure spectrale sur L^2_∞. Alors $\Sigma_\alpha \longrightarrow \Sigma$ fortement (resp. compactement) si, et seulement si, $\mathcal{E}_\alpha$ Mosco-converge (resp. Γ-converge compactement) vers $\mathcal{E}$.

Preuve. On va montrer l'équivalence entre la convergence forte (resp. compacte) des résolvantes et la Mosco-convergence (resp. Γ-convergence compacte) des énergies.

Commençons par supposer que le filet $(\mathcal{E}_\alpha)$ Mosco-converge et montrons que pour tout $z \in L^2_\infty$, si on prend un filet z_α convergeant fortement vers z alors le filet $u_\alpha = -R_\lambda^\alpha z_\alpha$ converge fortement vers $u = -R_\lambda z$. Le vecteur u est caractérisé comme étant l'unique point minimisant de

$$v \mapsto \mathcal{E}(v) - \lambda \|v\|_\infty^2 - 2\langle z, v\rangle_\infty$$

on peut caractériser de même les u_α. Comme opérateur de L_α^2, R_λ^α est borné par $-\lambda^{-1}$. Ainsi le filet (u_α) est borné, de sorte que l'on peut en tirer un sous-filet faiblement convergent, encore noté (u_α), de limite $\tilde{u}$. Par la condition (F2) pour tout $v \in L_\infty^2$ on peut trouver un filet v_α convergeant fortement vers v tel que $\lim_\alpha \mathcal{E}_\alpha(v_\alpha) = \mathcal{E}(v)$. Or pour tout α

$$\mathcal{E}_\alpha(u_\alpha) - \lambda\|u_\alpha\|_\alpha^2 - 2\langle z_\alpha, u_\alpha\rangle_\alpha \leq \mathcal{E}_\alpha(v_\alpha) - \lambda\|v_\alpha\|_\alpha^2 - 2\langle z_\alpha, v_\alpha\rangle_\alpha \qquad (\mathbb{III}\text{-}13)$$

en passant à la limite sur $\alpha \in \mathcal{A}$ on trouve, en utilisant la condition (F1') de $\mathbb{III}.17$ et le fait que pour un filet convergeant faiblement $\|\tilde{u}\|_\infty \leq \liminf_\alpha \|u_\alpha\|_\alpha$ (on rappelle que $\lambda < 0$),

$$\mathcal{E}(\tilde{u}) - \lambda\|\tilde{u}\|_\infty^2 - 2\langle z, \tilde{u}\rangle_\infty \leq \mathcal{E}(v) - \lambda\|v\|_\infty^2 - 2\langle z, v\rangle_\infty$$

on en déduit que $\tilde{u} = -R_\lambda z$. En raison de l'unicité de u, ceci montre que le filet (u_α) converge faiblement vers u. Montrons à présent que $\|u_\alpha\|_\alpha$ converge vers $\|u\|_\infty$. Pour cela considérons un filet v_α convergeant fortement vers u tel que $\lim_\alpha \mathcal{E}_\alpha(v_\alpha) = \mathcal{E}(u)$, réécrivons l'inégalité ($\mathbb{III}$-13) :

$$\mathcal{E}_\alpha(u_\alpha) - \lambda\|u_\alpha + z_\alpha/\lambda\|_\alpha^2 \leq \mathcal{E}_\alpha(v_\alpha) - \lambda\|v_\alpha + z_\alpha/\lambda\|_\alpha^2$$

de nouveau en utilisant (F1'), on obtient

$$\mathcal{E}(v) - \lambda \limsup_\alpha \|u_\alpha + z_\alpha/\lambda\|_\alpha^2 \leq \mathcal{E}(v) - \lambda\|u + z/\lambda\|_\infty^2$$

d'où $\|u_\alpha + z_\alpha/\lambda\|_\alpha^2 \to \|u + z/\lambda\|_\infty^2$ ce qui implique que le filet $(u_\alpha + z_\alpha/\lambda)_\alpha$ converge fortement. Le filet (z_α) convergeant fortement on en déduit que (u_α) converge fortement.

Étudions le cas de la Γ-convergence compacte. Considérons un filet w_α convergeant faiblement vers w et soit $u_\alpha = -R_\lambda^\alpha w_\alpha$ Alors le filet u_α est encore borné. En remplaçant z_α par w_α dans ($\mathbb{III}$-13) on obtient que $\limsup_\alpha \mathcal{E}_\alpha(u_\alpha)$ est bornée, de sorte que par la compacité asymptotique on peut extraire un sous-filet fortement convergeant de u_α, de limite $\tilde{u}$. En ré-injectant dans ($\mathbb{III}$-13), avec $z_\alpha = v_\alpha$ où (v_α) est un filet fortement convergeant vers v, on obtient

$$\mathcal{E}(\tilde{u}) - \lambda\|\tilde{u}\|_\infty^2 - 2\langle w, \tilde{u}\rangle_\infty \leq \mathcal{E}(v) - \lambda\|v\|_\infty^2 - 2\langle w, v\rangle_\infty$$

de sorte que $\tilde{u} = -R_\lambda w$. En raison de l'unicité on conclut à la convergence forte de $R_\lambda^\alpha w_\alpha$ vers $R_\lambda w$.

Réciproquement supposons que, pour tout $\lambda < 0$, le filet R_λ^α converge fortement vers R_λ. Dans ce qui suit (u_α) sera un filet fortement convergeant vers u.

Conditions (F1') : déjà fait, voir la propriété $\mathbb{II}.12$.

Conditions (F2) : On extrait un sous-filet $\lambda_\alpha \to -\infty$ tel que

$$\mathcal{E}(u,u) \geq \lim_{\lambda} \lim_{\alpha} a_\alpha^\lambda(u_\alpha, u_\alpha) \geq \lim_{\alpha} a_\alpha^{\lambda_\alpha}(u_\alpha, u_\alpha)$$

on prend alors le filet $w_\alpha = \lambda_\alpha R^\alpha_{\lambda_\alpha} u_\alpha$ pour tout α, et on remarque que

$$\begin{aligned} a_\alpha^\lambda(u_\alpha, u_\alpha) &= -\lambda\langle u_\alpha - \lambda R^\alpha_\lambda u_\alpha, u_\alpha\rangle_\alpha - \lambda\langle u_\alpha - \lambda R^\alpha_\lambda u_\alpha, -\lambda R^\alpha_\lambda u_\alpha\rangle_\alpha \\ &\quad +\lambda\langle u_\alpha - \lambda R^\alpha_\lambda u_\alpha, -\lambda R^\alpha_\lambda u_\alpha\rangle_\alpha \\ &= -\lambda\|u_\alpha - \lambda R^\alpha_\lambda u_\alpha\|_\alpha^2 + \lambda^2\langle u_\alpha - \lambda R^\alpha_\lambda u_\alpha, -R^\alpha_\lambda u_\alpha\rangle_\alpha \\ &= -\lambda\|u_\alpha - \lambda R^\alpha_\lambda u_\alpha\|_\alpha^2 + \mathcal{E}_\alpha(\lambda R^\alpha_\lambda u_\alpha) \end{aligned}$$

en effet si on note a_α la forme bilinéaire associée à $\mathcal{E}_\alpha$ alors $R^\alpha_\lambda u_\alpha$ peut être définie comme le seul élément tel que

$$a_\alpha(-R^\alpha_\lambda u_\alpha, v_\alpha) - \lambda\langle -R^\alpha_\lambda u_\alpha, v_\alpha\rangle_\alpha = \langle u_\alpha, v_\alpha\rangle_\alpha, \quad \forall v_\alpha \in D(\mathcal{E}_\alpha)$$

de sorte que, finalement,

$$a_\alpha^{\lambda_\alpha}(u_\alpha, u_\alpha) = \mathcal{E}_\alpha(w_\alpha, w_\alpha) - \lambda_\alpha\|u_\alpha - w_\alpha\|_\alpha^2$$

On en déduit que $w_\alpha \to u$ fortement dans $\mathcal{L}^2$ et

$$\mathcal{E}(u,u) \geq \limsup_{\alpha\to+\infty} \mathcal{E}_\alpha(w_\alpha, w_\alpha)$$

on a obtenu ce que l'on voulait.

Pour le cas de la convergence compacte, il suffit de montrer la compacité asymptotique, mais cela a été fait en $\mathbb{II}.12$ ❏

III Le son macroscopique caractéristique des tores plats

III.1 λ_1 asymptotique

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant et son corollaire que l'on pourrait résumer par «Macroscopically, one can hear the sound of a flat torus !».

Théorème $\mathbb{III}$.21.
Soient $(\mathbb{T}^n, g)$ un tore de dimension n, $B_g(\rho)$ la boule géodésique de rayon ρ induite sur son revêtement universel, centrée en un point fixé, et $\lambda_1\big(B_g(\rho)\big)$ la première valeur propre du laplacien pour le problème de Dirichlet sur $B_g(\rho)$ alors

1. $\lim\limits_{\rho\to\infty} \rho^2\lambda_1\big(B_g(\rho)\big) = \lambda_\infty \leq \lambda_{e,n}$
2. *En cas d'égalité la norme stable est euclidienne.*

où λ_∞ est la première valeur propre d'un opérateur elliptique sur la boule unité de la norme stable et $\lambda_{e,n}$ la première valeur propre du laplacien euclidien, sur la boule euclidienne.

Ce théorème est à rapprocher du théorème sur le volume asymptotique démontré par D. Burago et S. Ivanov dans [BI95].

La convergence de la valeur propre est donnée par la théorie de l'homogénéisation décrite en $\mathbb{III}$.I.2. Il reste donc à donner la preuve de la majoration et à caractériser le cas d'égalité. La démonstration que nous proposons consiste à majorer $\lambda_1\big(B_g(\rho)\big)$ pout tout ρ en faisant intervenir une fonction qui dépend uniquement de la distance au centre. Ensuite on utilise la convergence simple des distances vers la norme stable, telle que donnée par la théorie de l'homogénéisation (cf. théorème $\mathbb{III}$.1) ou P. Pansu [Pan82] (sachant que D. Burago [Bur92] démontre la convergence uniforme) et enfin la proposition ($\mathbb{II}$-2).

Preuve. Soit f une fonction continue de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ on définit

$$\begin{array}{rcl} f_\rho : \delta_{1/\rho} B_g(\rho) & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f\left(\dfrac{d_g\big(0, \delta_\rho(x)\big)}{\rho}\right) \end{array}$$

et $f_\infty(x) = f\big(\|x\|_\infty\big)$ sur $B_\infty(1)$ on veut montrer que (on rappelle que $\delta_\rho(x) = \rho x$)

$$\int f_\rho \cdot \chi_{B_g(\rho)} \circ \delta_\rho d\mu_\rho \underset{\rho\to\infty}{\longrightarrow} \int_{B_\infty(1)} f_\infty \, d\mu_\infty \qquad (\mathbb{III}\text{-}14)$$

Pour cela on va découper la différence des deux termes en trois parties i.e. :

$$\left|\int f_\rho \cdot \chi_{B_g(\rho)} \circ \delta_\rho \, d\mu_\rho - \int_{B_\infty(1)} f_\infty \, d\mu_\infty\right| \leq$$

$$\left|\int f_\rho \cdot \left(\chi_{B_g(\rho)} \circ \delta_\rho - \chi_{B_\infty(1)}\right) d\mu_\rho\right| \tag{III-15}$$

$$+\left|\int_{B_\infty(1)} (f_\rho - f_\infty) d\mu_\rho\right| \tag{III-16}$$

$$+\left|\int_{B_\infty(1)} f_\infty \, d\mu_\rho - \int_{B_\infty(1)} f_\infty \, d\mu_\infty\right| \tag{III-17}$$

A présent il suffit de remarquer que

1. Le terme (III-15) tend vers 0 car à l'intérieur on a le produit de $\chi_{B_g(\rho)} \circ \delta_\rho - \chi_{B_\infty(1)}$, qui tend simplement vers 0 en vertu de III.1.bis, et de termes bornés à support sur un même compact.
2. Pour (III-16) même raisonnement mais ici c'est $f_\rho - f_\infty$ qui tend simplement vers 0
3. quant a (III-17) c'est à la proposition (II-2) que nous la devons.

En conclusion on a bien (III-14). On calcul à présent le quotient de Rayleigh de f_ρ ce qui nous donne :

$$\rho^2 \lambda_g\left(B_g(\rho)\right) \leq \frac{\displaystyle\int \left((f')_\rho\right)^2 \cdot \chi_{B_g(\rho)} \circ \delta_\rho \, d\mu_\rho}{\displaystyle\int (f_\rho)^2 \cdot \chi_{B_g(\rho)} \circ \delta_\rho \, d\mu_\rho} \tag{III-18}$$

à présent on applique (III-14) pour obtenir

$$\limsup_{\rho\to\infty} \rho^2 \lambda_g\left(B_g(\rho)\right) \leq \frac{\displaystyle\int_{B_\infty(1)} \left((f')_\infty\right)^2 d\mu_\infty}{\displaystyle\int_{B_\infty(1)} f_\infty^2 \, d\mu_\infty} \tag{III-19}$$

en prenant pour f la bonne fonction (i.e. la solution de l'équation $f'' + \frac{n-1}{x} f'(x) + \lambda_e f = 0$) on conclut.

Pour le cas d'égalité on prend de nouveau pour f la fonction qui donne la fonction propre du laplacien dans le cas de la boule dans l'espace euclidien usuel (i.e. la solution de $f'' + \frac{n-1}{x} f'(x) + \lambda_e f = 0$) et on la normalise (en norme L^2). La théorie de la Γ-convergence nous permet de dire que, en notant $\mathcal{E}_\rho$ et $\mathcal{E}_\infty$ les énergies respectives de Δ_ρ et Δ_∞ sur les boules $\left(\delta_{1/\rho} B_g(\rho)\right)$ et $B_\infty(1)$ pour les mesures adaptés, on a :

$$\mathcal{E}_\infty(f_\infty) \leq \liminf_{\rho\to\infty} \mathcal{E}_\rho(f_\rho) \leq \limsup_{R\to\infty} \mathcal{E}_\rho(f_\rho) \leq \lambda_e \tag{III-20}$$

(ici on suppose de plus les fonctions normalisées) ceci en vertu de la propriété $\mathbb{II}.12$ et du théorème $\mathbb{II}.19$. Par hypothèse de l'égalité,

$$\lambda_e \leq \mathcal{E}_\infty(f_\infty), \tag{$\mathbb{III}$-21}$$

de sorte que ($\mathbb{III}$-20) et ($\mathbb{III}$-21) impliquent l'égalité. On en déduit que f_∞ est dans l'espace propre associé à la première valeur propre. Donc f_∞ est C^∞ (au moins au voisinage de zéro). Maintenant en étudiant les fonctions de Bessel (cf. [Bow58], §03 à §05) on s'aperçoit qu'en posant $p = (n-2)/2$ on a $f(x) = x^{-p} J_p\big(\sqrt{\lambda_e} x\big)$. Or J_p est analytique et définie par (cf. [Bow58] §4)

$$J_p(x) = \frac{x^p}{2^p \Gamma(p+1)} \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 2n+2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot 2n+2 \cdot 2n+4} + \dots \right)$$

de sorte que f est de la forme

$$f(x) = \frac{\lambda_e^p}{2^p \Gamma(p+1)} \left(1 - \frac{x^2 \lambda_e}{2 \cdot 2n+2} + \frac{x^4 \lambda_e^2}{2 \cdot 4 \cdot 2n+2 \cdot 2n+4} + \dots \right)$$

autrement dit de la forme $1 + \alpha_1 x^2 + \alpha_2 x^4 + \dots$ (à une constante multiplicative près) en particulier la fonction $1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \dots$ est inversible au voisinage de zéro, d'inverse $g \in C^\infty$ ce qui implique que $g \circ f_\infty(x) = cst \cdot \|x\|_\infty^2$ est une fonction C^2 au voisinage de zéro, donc la norme stable est associée à un produit scalaire, i.e. la norme stable est euclidienne. ❑

Corollaire $\mathbb{III}$.21.bis
Si $\lim_{\rho \to \infty} \rho^2 \lambda_g\big(B_g(\rho)\big) = \lambda_{e,n}$ *alors la métrique g est plate.*

Preuve. La norme stable étant euclidienne on peut conclure comme pour le cas d'égalité dans [BI95] concernant le volume asymptotique. ❑

III.2 Sur le volume asymptotique

III.2.a Une inégalité de Faber-Krahn généralisée

Nous avons besoin de quelques définitions.

Définition $\mathbb{III}$.22.
Pour une sous-variété N de $\mathbb{R}^n$ rectifiable (on pourra la penser de mesure non infinie pour la mesure de Hausdorff adaptée) on notera le courant d'intégration associé $I(N)$. Pour un courant C d'intégration on notera $M(C)$ sa masse telle que définie par H. Federer.

Définition $\mathbb{III}$.23.
Soit $\mathbb{R}^n$, muni d'une norme $\|\cdot\|$ (on notera $\|\cdot\|_*$ sa duale), alors on définit

$$\lambda_1\big(\Omega, \|\cdot\|\big) = \inf_f \frac{\displaystyle\int_\Omega \|df\|_*^2 d\mu}{\displaystyle\int_\Omega f^2 d\mu} \tag{$\mathbb{III}$-22}$$

où μ est la mesure de Haar sur $\mathbb{R}^n$ et les fonctions f sont lipschitziennes nulles sur le bord.

On a le lemme suivant,

Lemme $\mathbb{III}$.24 (Inégalité de Faber-Krahn pour les normes).
Soit D un domaine de $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme $\|\cdot\|$ et d'une mesure invariante par translation. Notons D^* la boule pour la norme de même volume que D alors,

$$\lambda_1\big(D^*, \|\cdot\|\big) \leq \lambda_1\big(D, \|\cdot\|\big) \tag{III-23}$$

le cas d'égalité implique que D est une boule.

Preuve. Nous avons besoin de deux outils pour y arriver, le premier étant une inégalité isopérimétrique, celle-ci nous est donnée par un résultat de Brunn (voir démonstration par M. Gromov dans [MS86]), le second est une formule de la co-aire. Celle-ci se trouve dans Federer [Fed69] p. 438. plus précisément, en notant $G_t = \{x \mid |f(x)| = t\}$, on a d'une part que

$$\int_\Omega h\alpha \wedge df = \int_0^{\sup f} \int_{G_t} h\alpha_{|G_t} dt = \int_0^{\sup f} I_{|f|=t}(h\alpha)dt$$

et d'autre part

$$\int_\Omega \|df\|^\infty dv = \int_0^{\sup f} M(I_{|f|=t})dt \tag{III-24}$$

(cf P. Pansu [Pan99]) où dv est la forme volume de $\mathbb{R}^n$ invariante par translation et telle que le volume de la boule unité pour la norme $\|\cdot\|$ soit égal à 1.

En considérant $\alpha = \dfrac{1}{|df|^2} * df$ où $*$ représente l'opérateur de Hodge sur les formes différentielles de $\mathbb{R}^n$ euclidien, on obtient

$$\int_\Omega h dv = \int_0^{\sup f} \int_{G_t} h\alpha_{|G_t} dt$$

On considère à présent la même égalité sur $\Omega_t = \big\{x \mid |f(x)| > t\big\}$ i.e. :

$$\int_{\Omega_t} h dv = \int_t^{\sup f} \int_{G_t} h\alpha_{|G_t} dt = \int_t^{\sup f} I_{|f|=t}(h\alpha)dt \tag{III-25}$$

en dérivant chaque membre de l'égalité ($\mathbb{III}$-25) on obtient presque partout l'égalité

$$\int_{G_t} h\alpha_{|G_t} = I_{|f|=t}(h\alpha) \tag{III-26}$$

à présent en combinant ($\mathbb{III}$-26) et ($\mathbb{III}$-24) on déduit

$$\int_{G_t} \|df\|^\infty \alpha_{|G_t} = M(I_{|f|=t}) \tag{III-27}$$

en appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz au membre de gauche de ($\mathbb{III}$-27) et en identifiant les termes correspondant par ($\mathbb{III}$-26) on obtient l'inégalité suivante

$$\frac{M(I_{|f|=t})^2}{I_{|f|=t}(\alpha)} \leq I_{|f|=t}\Big(\big(\|df\|^{\infty}\big)^2\alpha\Big) \qquad (\mathbb{III}\text{-}28)$$

La fonction f^* associée à f par symétrisation étant lipschitzienne, on a une formule de la co-aire similaire. De sorte que l'on à presque partout l'égalité

$$I_{|f|=t}(\alpha) = -\frac{d}{dt}\mathrm{Vol}(\Omega_t) = -\frac{d}{dt}\mathrm{Vol}(\Omega_t^*) = I_{|f^*|=t}(\alpha^*) \qquad (\mathbb{III}\text{-}29)$$

et par l'inégalité isopérimétrique de Brunn (cf. [MS86]) on à l'inégalité

$$M(I_{|f^*|=t}) \leq M(I_{|f|=t}) \qquad (\mathbb{III}\text{-}30)$$

en incorporant ($\mathbb{III}$-29) et ($\mathbb{III}$-30) dans ($\mathbb{III}$-28) et en remarquant que $\|df^*\|^{\infty}$ est constant sur $\{|f| = t\}$ et que, par conséquent , l'équivalent de ($\mathbb{III}$-28) pour f^* est une égalité on obtient (presque partout)

$$I_{|f^*|=t}\Big(\big(\|df^*\|^{\infty}\big)^2\alpha^*\Big) = \frac{M(I_{|f^*|=t})^2}{I_{|f^*|=t}(\alpha^*)} \leq \frac{M(I_{|f|=t})^2}{I_{|f|=t}(\alpha)} \leq I_{|f|=t}\Big(\big(\|df\|^{\infty}\big)^2\alpha\Big) \qquad (\mathbb{III}\text{-}31)$$

Il ne reste plus qu'à intégrer les termes extrêmes de ($\mathbb{III}$-31) pour obtenir l'inégalité désirée, i.e.

$$\int_{\Omega^*}\big(\|df^*\|^{\infty}\big)^2 dv \leq \int_{\Omega}\big(\|df\|^{\infty}\big)^2 dv$$

ce qui permet de conclure la preuve, étant donné le fait que,

$$\int_{\Omega^*}(f^*)^2 dv = \int_{\Omega}(f)^2 dv.$$

Quant au cas d'égalité, il implique le cas d'égalité dans l'inégalité isopérimétrique de Brunn, ce qui permet de conclure. ❑

Remarquons que ce lemme implique immédiatement

Corollaire $\mathbb{III}$.24.bis
Soit D_1 la boule unité pour la norme $\|\cdot\|$ alors

$$\lambda_1(D_1) = \lambda_{e,n}$$

donc

$$\lambda_{e,n}\left(\frac{\mu(D_1)}{\mu(D)}\right)^{\frac{2}{n}} \leq \lambda_1\big(D, \|\cdot\|\big)$$

où μ est une mesure de Haar sur $\mathbb{R}^n$.

Preuve. La symétrisation du théorème précédent montre que la borne inférieure est atteinte par les fonctions ne dépendant que de la distance au centre, de sorte que l'on fait le même calcul que dans le cas euclidien. ❑

III.2.b Minoration du volume asymptotique

On va appliquer l'inégalité de Faber-Krahn généralisée à λ_∞, pour cela remarquons que $\lambda_\infty\big(B_\infty(1)\big) = \lambda_1\big(B_\infty(1), \|\cdot\|_h\big)$ avec (quitte à normaliser la mesure de Haar associée pour que la boule unité de $\|\cdot\|_h$ soit de mesure 1, mais cela ne change pas les quotients de Raleigh)

$$\|\xi\|_h^* = \sum_{ij} q^{ij}\xi_i\xi_j$$

et notons B_h la boule unité de $\|\cdot\|_h$. On peut appliquer l'inégalité du lemme $\mathbb{III}$.24 et plus précisément son corollaire $\mathbb{III}$.24.bis,

$$\lambda_\infty(B_\infty(1)) \geq \left(\frac{\mu(B_h)}{\mu(B_\infty(1))}\right)^{2/n} \lambda_e$$

où on note μ une mesure de Haar quelconque. Maintenant, en appliquant le théorème $\mathbb{III}$.21, on obtient :

$$\left(\frac{\mu(B_h)}{\mu(B_\infty(1))}\right)^{2/n} \leq 1 \quad \text{après simplification.} \tag{$\mathbb{III}$-32}$$

Le résultat suivant s'en déduit en prenant pour mesure de Haar dans ($\mathbb{III}$-32), celle dont le volume de $B_\infty(1)$ est le volume asymptotique (i.e. μ_∞), d'une part et en transformant le second membre pour faire apparaître le volume du tore d'Albanese d'autre part.

Proposition $\mathbb{III}$.25.
Soit $(\mathbb{T}^n, g)$ un tore de dimension n, $B_g(\rho)$ les boules géodésiques de rayon ρ centrées en un point fixe, induites sur son revêtement universel et $\mathrm{Vol}_g\big(B_g(\rho)\big)$ leur volume riemannien si on pose

$$\mathrm{Volas}(g) = \lim_{\rho\to\infty} \frac{\mathrm{Vol}_g\big(B_g(\rho)\big)}{\rho^n}$$

alors

- $\mathrm{Volas}(g) \geq \dfrac{\mathrm{Vol}_g(\mathbb{T}^n)}{\mathrm{Vol}_{Al}(\mathbb{T}^n)} b_n$
- *en cas d'égalité la norme stable associée à g est euclidienne, donc le tore est plat.*

où b_n est le volume euclidien de la boule euclidienne unitaire.

Preuve. Il s'agit maintenant de justifier le cas d'égalité, celui-ci découle soit du cas d'égalité dans l'inégalité de Faber-Krahn, imposant que $B_\infty(1)$ est un ellipsoÍde, soit du cas d'égalité dans le théorème $\mathbb{III}$.21. ❑

Il nous reste deux remarques concernant cette proposition, la première est incluse dans le corollaire suivant

Corollaire $\mathbb{III}$.25.bis
Pour $n = 2$ on obtient
- $\mathrm{Volas}(g) \geq b_2$
- *en cas d'égalité la norme stable associée à g est euclidienne, donc le tore est plat.*

C'est-à-dire que l'on obtient à nouveau le théorème de D. Burago et S. Ivanov sur le volume asymptotique des tores en dimension 2 (cf. [BI95]). La seconde est que l'on ne peut faire mieux, pour la justification de cette affirmation nous renvoyons à III.3.

III.3 Exemples

III.3.a Les tores plats en dimension $n \geq 1$

Utilisons notre méthode pour voir ce qu'elle nous permet de dire dans le cas de la dimension 1, sachant que, dans ce cas, normalement tout doit se simplifier.

Avec les notations de I.2 on va chercher la forme de l'opérateur homogénéisé.

Commençons donc par prendre une métrique riemannienne périodique sur $\mathbb{R}$, i.e. une fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_*^+$ telle que $g(x+1) = g(x)$, et la métrique $g(x)^2 dx^2$ alors le laplacien associé est

$$\Delta = \frac{1}{g(x)} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{g(x)} \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

Pour déterminer l'opérateur homogénéisé il nous faut déterminer la fonction χ donnée par l'équation ($\mathbb{III}$-8) soit dans notre cas

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{g(y)} \frac{\partial}{\partial y} \chi(y) \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{g(y)} \right)$$

qui s'intègre immédiatement en

$$\begin{aligned} \frac{1}{g(y)} \frac{\partial}{\partial y} \chi(y) &= \frac{1}{g(y)} + c \\ \frac{\partial}{\partial y} \chi(y) &= 1 + c g(y) \end{aligned}$$

on intègre une seconde fois pour obtenir

$$\chi(y) = y + c \int_0^y g(t) dt + constante$$

il reste à déterminer c, et cette constante est déterminée par la condition de périodicité et on obtient finalement :

$$\chi(y) = y - \frac{\int_0^y g(t) dt}{\int_0^1 g(t) dt} \qquad (\mathbb{III}\text{-}33)$$

de sorte qu'en combinant (III-33) et (III-9) on obtient l'opérateur homogénéisé suivant :

$$-\frac{1}{\left(\int_0^1 g(t)dt\right)^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} = -\alpha\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \Delta_\infty$$

Comparons à présent le volume de $[0,1]$ pour g au volume pour la métrique, que nous nommerons homogène, associée : Pour g on obtient $\int_0^1 g(t)dt = \mathrm{Vol}(g)$ et pour la métrique homogène on obtient $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \int_0^1 g(t)dt$; il y a donc égalité. Les tores de dimension 1 étant plats il est normal que nous obtenions ce résultat.

Passons aux dimensions supérieures et considérons une métrique plate particulière de la forme $\sum_{i=1}^n g_i^2(x_i)dx_i^2$, le volume est alors

$$\mathrm{Vol}_g(\mathbb{T}) = \prod_{i=1}^n \int_0^1 g_i(t)dt.$$

On notera $G^j(x_1,\ldots,x_{j-1},x_{j+1},\ldots,x_n) = \prod_{i\neq j} g_i(x_i)$ et $G(x) = \prod_{i=1}^n g_i(x_i)$ le déterminant. Les équations pour les χ_j deviennent alors

$$\sum_{i=1}^n G^i\frac{\partial}{\partial y_i}\frac{1}{g_i}\frac{\partial\chi^j}{\partial y_i} = G^j\frac{\partial}{\partial y_j}\frac{1}{g_j(y_j)}.$$

On peut voir que le problème est à une dimension, par conséquent on peut supposer que les χ_j ne dépendent que de y_j ; les équations se réduisent à :

$$\frac{\partial}{\partial y_j}\frac{1}{g_j}\frac{\partial\chi^j}{\partial y_j} = \frac{\partial}{\partial y_j}\frac{1}{g_j(y_j)}$$

qui est l'équation à une dimension ; ainsi on obtient,

$$\chi_j(y) = y_j - \frac{\int_0^{y_j} g_j(t)dt}{\int_0^1 g_j(t)dt}$$

et donc

$$\Delta_\infty = \frac{1}{\mathrm{Vol}(g)}\quad\int_{\text{Д}}\frac{G^j(x)}{\int_0^1 g_j(t)dt}dx\Bigg)\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

de sorte que

$$\frac{\mathrm{Vol}_g(\mathbb{T})}{\mathrm{Vol}_{Al}(\mathbb{T})} = \frac{\prod_{j=1}^n\int_{\text{Д}}\frac{G^j(x)}{\int_0^1 g_j(t)dt}}{\mathrm{Vol}_g(\mathbb{T})^{n-2}} = \frac{\prod_{j=1}^n\int_{\text{Д}} G^j(x)dx}{\mathrm{Vol}_g(\mathbb{T})^{n-1}} = 1$$

III.3.b La dimension 2

Considérons une métrique conformément équivalente à une métrique euclidienne, $g^2(x,y)dx^2 = g^2(x,y)(dx^2+dy^2)$. Ici g est supposée périodique de période 1 en x et y. Dans ce cas il nous faut déterminer deux fonctions χ^x et χ^y. D'abord, observons que le laplacien associé est :

$$\Delta = -\frac{1}{g(x,y)^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial y}\right)$$

l'équation ($\mathbb{III}$-8) n'admettant pas de second membre s'écrit tout simplement :

$$\frac{\partial^2}{\partial x}\chi^* + \frac{\partial^2}{\partial y}\chi^* = 0$$

et les seules fonctions périodiques de période 1 sont les fonctions constantes. Ainsi

$$\Delta_\infty = -\frac{1}{\mathrm{Vol}(g)}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$$

et en notant A_∞ la matrice associée à Δ_∞ on a

$$\frac{\mathrm{Vol}_g(\mathbb{T})}{\mathrm{Vol}_{Al}(\mathbb{T})} = \sqrt{\det A_\infty} \times \mathrm{Vol}\, g = 1.$$

III.3.c Le cas conformément plat, $n \geq 3$.

Recommencons comme précédemment, mais dans le cas où $n \geq 3$. Soit donc la métriques $g^2(x_1,\dots,x_n)(dx_1^2 + \cdots + dx_n^2)$, g périodique de période 1 en chaque x_i. Le laplacien associé est, dans ce cas, de la forme

$$\Delta = -\frac{1}{g^n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}g^{n-2}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

et l'équation pour χ^i est de la forme (on note $x = (x_1,\dots,x_n)$ et $y = (y_1,\dots,y_n)$) :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial y_i}g^{n-2}(y)\frac{\partial \chi^j}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_j}g^{n-2}(y)$$

d'autre part, on obtient :

$$-\mathrm{Vol}(g)\ \Delta_\infty = \sum_{i=1}^{n}\int_{Д} g(x)^{n-2}\,dx\,\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \sum_{i,j=1}^{n}\int_{Д} g(x)^{n-2}\frac{\partial \chi^j}{\partial x_i}\,dx\,\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

Le déterminant de A_∞, la matrice associée à Δ_∞, est alors :

$$\det(A_\infty) = \frac{1}{\mathrm{Vol}(g)^n}\sum_{\sigma}\varepsilon(\sigma)\prod_{i=1}^{n}\int_{Д} g(x)^{n-2}\left(\delta_{i\sigma(i)} - \frac{\partial \chi^{\sigma(i)}}{\partial x_i}\right)dx$$

Simplifions un peu la question en considérant g ne dépendant que d'une des variables, x_1 par exemple alors la recherche des χ^j devient :

$$\begin{cases} g(y_1)^{n-2}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2\chi^j}{\partial y_i^2} + (n-2)g'(y_1)g(y_1)^{n-3}\dfrac{\partial \chi^j}{\partial y_1} = 0 & \text{si } j \neq 1 \\ g(y_1)^{n-2}\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2\chi^1}{\partial y_i^2} + (n-2)g'(y_1)g(y_1)^{n-3}\dfrac{\partial \chi^1}{\partial y_1} = \dfrac{\partial}{\partial y_1}g^{n-2}(y_1) & \end{cases}$$

Ainsi en prenant

$$\begin{cases} \chi_j = 0 & \text{si } j \neq 1 \\ \chi_1 = y_1 - \dfrac{\displaystyle\int_0^{y_1} \left(1/g(t)^{n-2}\right) dt}{\displaystyle\int_0^1 \left(1/g(t)^{n-2}\right) dt} + c & \end{cases}$$

on obtient bien une solution, en effet :

Preuve. Pour $j \neq 1$ c'est immédiat. Si $j = 1$, χ_1 ne dépendant que de y_1, les calculs se simplifient, et :

$$\frac{\partial \chi_1}{\partial y_1} = 1 - \frac{1}{g(y_1)^{n-2} \displaystyle\int_0^1 \left(1/g(t)^{n-2}\right) dt},$$

de sorte que

$$g(y_1)^{n-2} \frac{\partial \chi_1}{\partial y_1} = g(y_1)^{n-2} - \frac{1}{\displaystyle\int_0^1 \left(1/g(t)^{n-2}\right) dt}$$

et, en dérivant une dernière fois,

$$\frac{\partial}{\partial y_1} g(y_1)^{n-2} \frac{\partial \chi_1}{\partial y_1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial y_i} g(y_1)^{n-2} \frac{\partial \chi^1}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial y_1} g(y_1)^{n-2}.$$

❏

Finalement, on obtient :

$$\frac{\mathrm{Vol}_g(\mathbb{T})}{\mathrm{Vol}_{Al}(\mathbb{T})} = \det A_\infty \, \mathrm{Vol}(g)^2 = \frac{\left(\displaystyle\int_0^1 g(t)^{n-2} dt\right)^{n-1}}{\left(\displaystyle\int_0^1 g(t)^n dt\right)^{n-2} \displaystyle\int_0^1 \left(1/g(t)^{n-2}\right) dt}$$

$$\frac{\mathrm{Vol}_g(\mathbb{T})}{\mathrm{Vol}_{Al}(\mathbb{T})} \leq \frac{\left(\displaystyle\int_0^1 g(t)^{n-2} dt\right)^{n}}{\left(\displaystyle\int_0^1 g(t)^n dt\right)^{n-2}} \qquad \text{Par C.-S.}$$

$$\frac{\mathrm{Vol}_g(\mathbb{T})}{\mathrm{Vol}_{Al}(\mathbb{T})} \leq \left(\frac{\left(\displaystyle\int_0^1 g(t)^{n-2} dt\right)^{1/n-2}}{\left(\displaystyle\int_0^1 g(t)^n dt\right)^{1/n}} \right)^{n(n-2)}$$

$$\frac{\mathrm{Vol}_g(\mathbb{T})}{\mathrm{Vol}_{Al}(\mathbb{T})} \leq 1 \qquad \text{par Hölder.}$$

L'égalité implique que la métrique de départ est euclidienne. En tout cas cela montre bien que l'on ne peut pas espérer obtenir l'inégalité de D. Burago et S. Ivanov dans la cas de dimension $n \geq 3$ par l'intermédiaire de la proposition III.25.

Remarque $\mathbb{III}$.26. On peut faire exactement la même chose avec $g(x) = \prod_i g_i(x_i)$. La question que l'on peut tout de même poser est celle de savoir si pour $n \geq 3$ on a pas $\mathrm{Vol}_g(\mathbb{T}) \leq \mathrm{Vol}_{Al}(\mathbb{T})$, le cas d'égalité étant obtenu pour les tores plats. Il semblerait que ce soit faux d'après un résultat de J. Lafontaine [Laf74]. Cependant qu'en est-il si l'on se restreint aux métriques conformément plates, les calculs précédants suggèrent que cela peut-être le cas.

Quatrième chapitre

Le cas des groupes de Heisenberg

Introduction

Le premier exemple de groupe de Lie nilpotent non-abelien est le groupe de Heisenberg de dimension 3. On peut le voir comme l'ensemble des matrices 3×3 triangulaires supérieures, avec des 1 sur la diagonale. Il est donc tout naturel de se pencher sur son cas lorsque l'on désire étudier les variétés nilpotentes. C'est un groupe riche en structures, et c'est pour cela qu'on le rencontre dans de nombreux domaines, ainsi on peut le voir comme un exemple de variété munie d'une structure de contact, ou l'étudier en tant que variété C-R.

Dans ce chapitre nous allons surtout nous concentrer sur les aspects riemanniens et sous-riemanniens des groupes de Heisenberg, et voir comment s'énoncent ici les théorèmes du deuxième chapitre. Nous espérons par ce bref panorama, mettre en valeur les différences avec les tores qui empechent de généraliser, pour l'instant, les résultats permettant de caractériser les tores plats par l'asymptotique des valeurs propres du laplacien.

I Panorama des groupes de Heisenberg

I.1 Définitions et propriétés

Où l'on donne des définitions des objets étudiés et de certains résultats les concernants.

Définition $\mathbb{IV}$.1 (Groupes de Heisenberg).
Le groupe de Heisenberg est défini par

$$\mathbb{H}_n = \left\{ \gamma\,(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & {}^t x & s \\ 0 & I_n & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{R}^{2n}, z \in \mathbb{R} \right\}$$

muni de la multiplication des matrices.

On rencontre dans la littérature plusieurs autres définitions selon que l'on se trouve dans le cadre des équations différentielles, de la géométrie CR, ou de la géométrie sous-riemannienne et qui sont toutes isomorphes. La géométrie sous-riemannienne nous intéresse tout particulièrement, mais avant de rappeler ce qu'elle est, nous allons voir la principale identification que nous ferons de ces groupes.

Propriété $\mathbb{IV}$.2 (Coordonnées classiques).
$\mathbb{H}_n$ est un sous-groupe fermé de $GL(n+2,\mathbb{R})$ difféomorphe à $\mathbb{R}^{2n+1}$ muni de la loi de groupe notée $*$ et donnée par :

$$(x, y, z) * (x', y', z') = \big(x + x', y + y', z + z' + \langle x, y'\rangle\big) \tag{$\mathbb{IV}$-1}$$

où $\langle\cdot,\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^{2n}$

Preuve. C'est une application immédiate de la définition. ❑

On peut remarquer que $\mathbb{H}_n$ est un fibré en droite sur $\mathbb{R}^{2n}$, toutes les difficultés viendrons justement de cette fibre !

Déterminons le commutateur

$$\big[\gamma\,(x, y, z), \gamma\,(x', y', z')\big] = \gamma\,\Big(0, 0, A\big((x, y), (x', y')\big)\Big)$$

où A est la forme symplectique standard sur $\mathbb{R}^{2n}$, dont la matrice par rapport à la base canonique est

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Il en résulte que le centre de $\mathbb{H}_n$ est $\mathbb{Z}_n = \{\gamma\,(0,0,z);\ z \in \mathbb{R}\}$ car A est non dégénérée, de sorte que $\mathbb{H}_n$ est nilpotent de rang deux.

L'algèbre de Lie $\mathfrak{h}_n$ de $\mathbb{H}_n$ est définie par :

$$\mathfrak{h}_n = \left\{ X(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 & {}^t x & s \\ 0 & \mathcal{O}_n & y \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, (x, y) \in \mathbb{R}^{2n}, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Propriété $\mathbb{IV}$.3.
l'exponentielle réalise un difféomorphisme de $\mathfrak{h}_n$ sur $\mathbb{H}_n$ et

$$\exp\big(X(x, y, z)\big) = \gamma\,\big(x, y, z + 1/2\langle x, y\rangle\big).$$

Le crochet de Lie est donné par

$$\big[X(x, y, z), X(x', y', z')\big] = X\Big(0, 0, A\big((x, y), (x', y')\big)\Big).$$

On en déduit que le centre de $\mathfrak{h}_n$ est $\mathfrak{z}_n = \big\{X(0,0,z);\ z \in \mathbb{R}\big\}$. Aprés identification de $\mathbb{R}^{2n}$ avec le sous-espace $\{X(x, y, 0);\ (x, y) \in \mathbb{R}^{2n}\big\}$ de $\mathfrak{h}_n$, on notera l'existence de la décomposition $\mathfrak{h}_n = \mathbb{R}^{2n} \oplus \mathfrak{z}_n$. Notons $Z = X(0,0,1)$, alors, pour tout X et Y dans $\mathbb{R}^{2n}$, $[X, Y] = A(X, Y)Z$; de sorte que l'on parvient à décrire les automorphismes

Propriété $\mathbb{IV}$.4 (Automorphisme de $\mathfrak{h}_n$).
Tout élément de $Aut(\mathfrak{h}_n)$ s'écrit sous la forme $\alpha\beta$ où $\beta \in Sp(n,\mathbb{R})$ et

$$\alpha = \begin{pmatrix} aI_{2n} & 0 \\ {}^t w & a^2 \end{pmatrix} \quad \text{où } a \in \mathbb{R}^* \text{ et } w \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Si $a = 1$, alors α est un automorphisme intérieur.

Introduisons à présent les coordonnées exponentielles. Cela consiste à paramétrer par l'algèbre de Lie,

$$(x,y,z) \mapsto \exp\big(X(x,y,z)\big) = \gamma\,(x,y,z+1/2\langle x,y\rangle)$$

et donc

$$\begin{aligned}
&\gamma\,(x,y,z+\frac{1}{2}\langle x,y\rangle)\gamma\,(x',y',z'+\frac{1}{2}\langle x',y'\rangle)\\
&\qquad=\gamma\left(x+x',y+y',z+z'+\frac{1}{2}\big(\langle x,y\rangle+\langle x',y'\rangle\big)+\langle x,y'\rangle\right)\\
&\qquad=\gamma\left(x+x',y+y',z+z'+\frac{1}{2}\big(\langle x+x',y+y'\rangle\big)+\frac{1}{2}\big(\langle x,y'\rangle-\langle x',y\rangle\big)\right)\\
&\qquad=\exp\left(X\left(x+x',y+y',z+z'+\frac{1}{2}\big(\langle x,y'\rangle-\langle x',y\rangle\big)\right)\right)
\end{aligned}$$

de sorte que l'on obtient finalement une nouvelle identification

Propriété $\mathbb{IV}$.5 (Coordonnées exponentielles).
$\mathbb{H}_n$ est isomorphe à $\mathbb{R}^{2n+1}$ muni de la relation de groupe :

$$(x,y,z)(x',y',z') = \left(x+x',y+y',z+z'+\frac{1}{2}\big(\langle x,y'\rangle-\langle x',y\rangle\big)\right)$$

I.2 Métriques invariantes à gauche des groupes de Heisenberg

Dans cette partie nous résumons ce qui est connu sur les métriques invariantes à gauche des groupes de Heisenberg.

I.2.a Métriques riemanniennes

Considérons la première représentation du groupe de Heisenberg $\mathbb{H}_n$, (i.e. les coordonnées classiques) et notons

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\,; \qquad Y_i = \frac{\partial}{\partial y_i} - x_i\frac{\partial}{\partial z}\,; \qquad Z = \frac{\partial}{\partial z}\,;$$

$$\alpha_i = dx_i\,; \qquad \beta_i = dy_i\,; \qquad \omega = dz + \sum_{i=1}^{n} x_i dy_i\,;$$

ces notations introduites on peut donner une classification des métriques invariantes à gauche sur $\mathbb{H}_n$.

Théorème $\mathbb{IV}$.6.
Toute métrique invariante à gauche sur $\mathbb{H}_n$ est équivalente, à automorphisme près, à l'une des métriques de la forme :

$$g_{\nu_1,\ldots,\nu_n} = \sum_{i=1}^{n} \nu_i^2(\alpha_i^2 + \beta_i^2) + \omega^2,$$

avec $\nu_1, \ldots, \nu_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Ce théorème provient de la caractérisation des automorphismes de $\mathfrak{h}_n$ et du lemme $\mathbb{IV}$.7 suivant. Pour l'énoncer, introduisons pour un n-uplet donné $r = (r_1, \ldots, r_n)$ vérifiant $0 < r_1 \leq \cdots \leq r_n$ l'ellipsoÍde fermée dans $\mathbb{C}^n$

$$E(r) = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \mid \sum_{i=1}^{N} \left| \frac{z_i}{r_i} \right|^2 \leq 1 \right\}$$

alors

Lemme $\mathbb{IV}$.7.
Soit un ellipsoÍde

$$E = \left\{ w \in \mathbb{R}^{2n} \mid \sum_{ij} a_{ij} w_i w_j \leq 1 \right\}$$

dans $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$ alors il existe une application linéaire symplectique $\Psi \in \mathfrak{sp}2n$ telle que $\Psi E = E(r)$ pour un n-uplet $r = (r_1, \ldots, r_n)$ tel que $0 < r_1 \leq \cdots \leq r_n$. De plus les nombres r_j sont déterminés de manière unique par E

Preuve. Considérons la forme symplectique canonique ω_0 sur $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$, ainsi que le produit scalaire

$$g(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} u_i v_j$$

de sorte que $E = \{w \in \mathbb{R}^{2n} \mid g(w, w) \leq 1\}$. Alors il existe une base $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n$ qui est orthogonale pour g et qui est aussi une base symplectique, i.e. la forme symplectique ω_0 sur $\mathbb{C}^n$ s'ecrit $\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$ pour les coordonnées $w = \sum_{i=1}^n (x_i u_i + y_i v_i)$; cela provient de la diagonalisation des matrices hermitiennes. On peut supposer que

$$g(u_i, u_i) = g(v_i, v_i) = \frac{1}{r_i^2}$$

Soit $\Phi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ l'application linéaire symplectique qui envoie la base standard de $\mathbb{R}^{2n}$ sur cette base (i.e., $\Phi z = \sum_{i=1}^n (x_i u_i + y_i v_i)$) alors

$$g(\Phi z, \Phi z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2 + y_i^2}{r_i^2}$$

et donc $\Psi = \Phi^{-1}$ vérifie ce que l'on voulait. Pour l'unicité du n-uplet, soit la matrice diagonal $D(r) = \{1/r_1^2, \ldots, 1/r_n^2, 1/r_1^2, \ldots, 1/r_n^2\}$ et supposons qu'il existe une matrice symplectique Ψ et un n-uplet r' tels que

$$^t\Psi D(r)\Psi = D(r')$$

comme $J_0{}^t\Psi = \Psi^{-1}J_0$ où J_0 est la matrice telle que $\omega_0(u,v) = \langle J_0 u, v\rangle$, alors on a

$$\Psi^{-1}J_0 D(r)\Psi = J_0 D(r')$$

de sorte que les valeurs propres de $J_0D(r)$ et $J_0D(r')$ doivent être identiques, or les valeurs propres de $J_0D(r)$ sont $(\pm i/r_1^2, \ldots, \pm i/r_n^2)$. ❑

En particulier pour le premier des groupe de Heisenberg on a

Corollaire $\mathbb{IV}$.7.bis
Sur $\mathbb{H}_1$ les métriques invariantes à gauches sont, à automorphisme près, de la forme

$$g_\nu = \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \nu^2\omega^2$$

I.2.b Métriques sous-riemanniennes

Ici on se place en coordonnées exponentielles de sorte que les champs invariants à gauche que l'on va considérer seront de la forme :

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{y_i}{2}\frac{\partial}{\partial z}\,; \qquad Y_i = \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{x_i}{2}\frac{\partial}{\partial z}\,; \qquad Z = \frac{\partial}{\partial z}\,;$$

$$\alpha_i = dx_i\,; \qquad \beta_i = dy_i\,; \qquad \omega = dz - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i dy_i - y_i dx_i\,;$$

alors on considère la distribution donnée par

$$\mathcal{H}_n = \ker\omega = \mathrm{Vect}\{X_i, Y_i \mid i = 1, \ldots, n\}.$$

Comme on a

$$\omega \wedge (d\omega)^n = dz \wedge dy_1 \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge dy_n \wedge dx_n \neq 0$$

la distribution $\mathcal{H}_n$ est totalement non intégrable. Néanmoins, nous allons considérer les métriques g définies positives sur $\mathcal{H}_n$. On a :

$$\begin{array}{lll} [X_i, Z] = 0 & [Y_i, Z] = 0 & [X_i, Y_j] = \delta_{ij} Z \\ [X_i, X_j] = 0 & [Y_i, Y_j] = 0 & \end{array}$$

la distribution vérifie les conditions de Hörmander ; deux points peuvent donc toujours être joints par une courbe presque partout horizontale i.e. dont le vecteur tangent est presque partout dans $\mathcal{H}_n$ (cf. Strichartz [Str86]), ceci nous permet de définir une distance d_g dite sous-riemannienne ou de Carnot-Carathodory. Comme pour le cas riemannien, le lemme $\mathbb{IV}$.7 nous donne

Théorème $\mathbb{IV}$.8.
Toute métrique sous-riemannienne invariante à gauche sur $(\mathbb{H}_n, \mathcal{H}_n)$ est équivalente, à automorphisme près, à l'une des métriques de la forme

$$g_{\nu_1,\ldots,\nu_n} = \sum_{i=1}^{n} \nu_i^2(\alpha_i^2 + \beta_i^2)$$

avec $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ sur la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ usuel. De plus la famille

$$\{g_\nu \mid \nu \in S^{n-1}\},$$

est irréductible.

De même

Corollaire $\mathbb{IV}$.8.bis
Sur $(\mathbb{H}_1, \mathcal{H}_1)$ les métriques sous-riemanniennes invariantes à gauches sont à automorphisme près de la forme

$$g = \alpha_1^2 + \beta_1^2$$

Remarque $\mathbb{IV}$.9. Cela est l'équivalent du fait qu'il existe des bases orthonormés sur $\mathbb{R}^n$ usuel, quelque soit le produit scalaire ; malheureusement comme on le voit ce n'est plus vrai pour $\mathbb{H}_n$ quand $n > 1$. La particularité du cas $n = 1$ provenant explicitement du fait que les matrices symplectiques 2×2 sont les matrices inversibles, ou $Sp(2, \mathbb{R}) = Gl(2, \mathbb{R})$.

On note

$$\begin{aligned} \mu(\varphi) &= \frac{\varphi}{\sin^2\varphi} - \cot\varphi\,; \\ \nu(\varphi) &= \frac{\varphi^2}{\varphi + \sin^2\varphi - \sin\varphi\cos\varphi} \quad \text{si } \varphi \neq 0 \text{ et } \nu(0) = 2\,; \end{aligned} \tag{$\mathbb{IV}$-2}$$

alors sur $\mathbb{H}_1$, pour la métrique $g = \alpha_1^2 + \alpha_2^2$, on a :

Théorème $\mathbb{IV}$.10 ([BGG00] théorème 1.36).
Il y a un nombre fini de géodésiques joignant l'origine à (x, y, t) si et seulement si $(x, y) \neq (0, 0)$. Ces géodésiques sont paramétrées par les solutions θ de

$$\mu(\theta/2)(x^2 + y^2) = 4|t| \tag{$\mathbb{IV}$-3}$$

et leurs longueurs sont strictement croissantes en fonction de θ. Il y a une seule géodésique si et seulement si

$$4|t| < \mu(\varphi_1)(x^2 + y^2)$$

où φ_1 est l'unique solution de $\varphi = \tan\varphi$ sur $]\pi, 2\pi[$. Sinon leur nombre tend vers l'infini lorsque $4|t|/(x^2 + y^2) \to \infty$. Le carré de la longueur de la géodésique donné par une solution θ de $\mathbb{IV}$-3 est

$$l(\theta)^2 = \nu(\theta/2)\big(4|t| + (x^2 + y^2)\big) \tag{$\mathbb{IV}$-4}$$

en particulier, si on considère θ_c l'unique solution de $\mathbb{IV}$-3 sur $[0, 2\pi[$ alors

$$d_g\big(0, (x, y, t)\big)^2 = \nu(\theta_c/2)\big(4|t| + (x^2 + y^2)\big) \tag{IV-5}$$

En remarquant que toute courbe sur $\mathbb{R}^2$ entre 0 et (x, y) peut être relevée en une courbe horizontale entre 0 et (x, y, t), où t est alors l'aire orientée entre le segment $[0, (x, y)]$ et la courbe, on en tire aisément le fait que les géodésiques sont des relevées d'arc de cercles sur $\mathbb{R}^2$ (où de droites si on reste dans le plan $t = 0$), cela provient du problème de Dido, alors ce qui suit devient évident :

Théorème $\mathbb{IV}$.11.
Les géodésiques joignant l'origine à un point $(0, 0, t)$ ont des longueurs d_1,d_2, etc ... définies par $(d_m)^2 = 4m\pi\,|t|$. de sorte que $d_g\big(0, (0, 0, t)\big)^2 = 4\pi\,|t|$.

Grâce au fait que toute métrique sous-riemannienne invariante à gauche sur $\mathbb{H}_1$ peut se ramener à automorphisme près à cette métrique on clôt ce cas. Sur $\mathbb{H}_n$ avec la métrique $g_{\nu_1,\dots,\nu_n} = \sum_{i=1}^n(\alpha_i^2 + \beta_i^2)/\nu_i^2$ où $0 < \nu_1 \le \cdots \le \nu_p < \nu_{p+1} = \cdots = \nu_n$ et en notant $X = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$, $\rho_i^2 = x_i^2 + y_i^2$ pour $i = 1, \dots, n$, $X' = (x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_p)$ et $X'' = (x_{p+1}, \dots, x_n, y_{p+1}, \dots, y_n)$ Il faut distinguer plusieurs cas :

Théorème $\mathbb{IV}$.12 ([BGG00] théorème 3.24).
Si $X'' \neq 0$, alors il y a un nombre fini de géodésiques entre l'origine et (X, t). Elles sont indéxées par les solutions de

$$4|t| = \sum_{i=1}^n \nu_i^2\rho_i^2\mu(\nu_i^2\theta/2) \tag{IV-6}$$

leur longueur croissante en fonction de θ. En particulier le carré de la distance sous-riemannienne entre (X, t) et l'origine est

$$d\big(0, (X, t)\big)^2 = \frac{\theta_c}{4}\Big(4|t| + \sum_{i=1}^n \cot(\nu_i^2\theta_c/2)\nu_i^2\rho_i^2\Big) \tag{IV-7}$$

où θ_c est l'unique solution de $\mathbb{IV}$-6 sur $]0, 2\pi/\nu_n^2[$.

Théorème $\mathbb{IV}$.13 ([BGG00] théorème 3.52).
Si $X' \neq 0$ et $X'' = 0$,

1. *Si*

$$|t| < \sum_{i=1}^n \nu_i^2\rho_i^2\mu(\nu_i^2\pi/\nu_n^2), \tag{IV-8}$$

alors la distance sous-riemannienne est donnée par

$$d_g\big(0, (X, t)\big)^2 = \theta/2 \quad 4|t| + \sum_{i=1}^n \nu_i^2\rho_i^2\cot(\nu_i^2\theta/2)\Big) \tag{IV-9}$$

où θ est la solution unique de $\mathbb{IV}$-6 sur $]0, 2\pi/\nu_n[$.

2. *Sinon, il y a une infinité de géodésiques de mêmes longueurs entre l'origine et* (X, t)*, paramétrées par la sphère*

$$\|\zeta''(0)\| = \frac{\pi}{\nu_n^2} \quad 4|t| - \sum_{i=1}^{n} \nu_i^2 \rho_i^2 \mu(\nu_i^2 \pi / \nu_n^2) \Bigg) \tag{IV-10}$$

où $\zeta = (\chi_1, \dots, \chi_n, \eta_1, \dots, \eta_n)$ *et* $\zeta'' = (\chi_{p+1}, \dots, \chi_n, \eta_{p+1}, \dots, \eta_n)$*. Leur longueur est donnée par*

$$d_g\big(0, (X, t)\big)^2 = \frac{\pi}{\nu_n^2} \quad 4|t| + \sum_{i=1}^{n} \nu_i^2 \rho_i^2 \cot(\nu_i^2 \pi / \nu_n^2) \Bigg) \tag{IV-11}$$

Il reste un cas.

Théorème IV.14.
Soit $X = 0$ *et* $t \neq 0$ *et fixons une paire d'entiers* (j, m)*,* $j = 1, 2, \dots, n$ *et* $m \in \mathbb{N}^*$*, alors il y a une infinité de géodésiques de même longueur* $d_{jm}(t)$ *entre l'origine et* $(0, t)$*, avec*

$$d_{jm}(t)^2 = \frac{4m\pi|t|}{\nu_j^2}. \tag{IV-12}$$

La distance sous-riemannienne entre l'origine et $(0, t)$ *est donc*

$$d_g\big(0, (0, t)\big)^2 = d_{n1}(t)^2 = \frac{4\pi|t|}{\nu_n^2}. \tag{IV-13}$$

Remarque IV.15. Le cas $\nu_1^2 = \cdots = \nu_n^2$ se déduit du cas $\mathbb{H}_1$. Pour tout les détails on se référera à [BGG00]. Pour une vision plus géométrique, on pourra visiter la page de R. Montgomery — http ://orca.ucsc.edu/˜rmont/sR.html — et consulter dans son livre en écriture le chapitre 1 « Dido meets Heisenberg ».

I.3 Sous groupes co-compacts des groupes de Heisenberg

Ce qui suit vient de [GW86].

Définition IV.16.
Soit $r = (r_1, r_2, \dots, r_n)$ un n-uplets d'entiers naturels non nuls tels que r_j divise r_{j+1} pour $1 \leq j \leq n$, on note $r\mathbb{Z}^n$ les n-uplets $x = (x_1, \dots, x_n)$ tels que $x_j \in r_j\mathbb{Z}$, $1 \leq j \leq n$. On définit

$$\Gamma_r = \big\{\gamma(x, y, t) \mid x \in r\mathbb{Z}^n, y \in \mathbb{Z}^n, t \in \mathbb{Z}\big\}$$

qui est un sous-groupe co-compact de $\mathbb{H}_n$.

On peut alors énoncer le théorème suivant qui caractérise les sous-groupes co-compact.

Théorème $\mathbb{IV}$.17 ([GW86] théorème 2.4).
Les sous groupes Γ_r de la définition $\mathbb{IV}.16$ classifient les sous groupes co-compacts de $\mathbb{H}_n$ à automorphismes près. Autrement dit, pour tout sous groupe co-compact Γ de $\mathbb{H}_n$, il existe un r unique tel que Γ soit envoyé par un automorphisme sur Γ_r. De plus pour r et s des n-uplets comme dans $\mathbb{IV}.16$, Γ_r et Γ_s sont des groupes isomorphes si et seulement si $r = s$.

II Mesures et convergences

II.1 Métrique sous-riemannienne et Mesure associée

II.1.a le groupe $\mathbb{H}_1$

On reprend les notations de I.2. Nous considérons à présent des métriques sous-riemanniennes dont la distribution est donnée par $\mathcal{H}_1 = \mathrm{Vect}\{X, Y\}$ et qui s'expriment par (on omet l'indice 1),

$$g = a(x,y,z)\alpha^2 + b(x,y,z)\beta^2 + c(x,y,z)(\alpha\beta + \beta\alpha)$$

où les fonctions a, b et c sont périodiques (par l'action à gauche d'un sous-groupe co-compact). Nous noterons la matrice correspondante

$$G_{\mathcal{H}} = \begin{pmatrix} a(x,y,z) & c(x,y,z) \\ c(x,y,z) & b(x,y,z) \end{pmatrix}$$

Lemme $\mathbb{IV}$.18.
La mesure de Haussdorff 4-dimensionnelle associée à la distance sous-riemannienne d_g, est déterminée par

$$\mu_g(A) = \int_A \det(G_{\mathcal{H}})\, dx\, dy\, dz$$

Preuve. On notera $\langle\cdot,\cdot\rangle = g_c$ la métrique invariante à gauche sur $\mathbb{H}_1$ décrite en I.2. On se place sur $\mathcal{H}_1(x)$, alors sur ce sous-espace $g(U,V) = \langle LU, LV\rangle_1$, où L est un automorphisme de $\mathfrak{h}_1$, procédons par étape :

Étape 1 : g est invariante à gauche, il suffit donc d'étudier ce qui se passe à l'origine alors

$$g(U,V) = {}^tU \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} V$$

Comme $G_{\mathcal{H}}$ est symétrique définie positive elle peut s'écrire sous la forme ${}^t\mathcal{L}\mathcal{L}$, on considère alors

$$L = \begin{pmatrix} \mathcal{L} & 0 \\ 0 & \sqrt{ab - c^2} \end{pmatrix}$$

qui est bien un automorphisme. En tout cas on a $L^* g_c = g$ de sorte qu'en notant H_g la mesure de Haussdorff 4-dimensionnelle associée à d_g on obtient $H_g(\Omega) = H_c\big(L(\Omega)\big)$, où H_c est la mesure associée à la métrique sous-riemannienne canonique. Or il s'avère que cette dernière correspond à la mesure de Haar usuelle sur $\mathbb{R}^3$ de sorte que $H_g(\Omega) = (\det L) H_c(\Omega)$, et comme $\det L = \det G_{\mathcal{H}}$ on conclut pour ce cas.

Étape 2 : En un point ξ fixé on a $g_\xi = L_\xi^* \langle\cdot,\cdot\rangle_\xi$. Or par continuité en ξ, pour tout $\lambda > 1$, on trouve un $\delta > 0$ tel que, pour tout $|\xi - x| \le \delta$ et pour tout $V \in \mathcal{H}_1(x)$,

$$\frac{1}{\lambda}\langle L_\xi \cdot V, L_\xi \cdot V\rangle_x \le g_x(V,V) \le \lambda \langle L_\xi \cdot V, L_\xi \cdot V\rangle_x$$

en intégrant sur ce voisinage, i.e., pour $|x - y| \leq \delta/2$, on trouve

$$\frac{1}{\lambda} d_c\big(L_\xi(x), L_\xi(y)\big) \leq d_g(x, y) \leq \lambda d_c\big(L_\xi(x), L_\xi(y)\big)$$

(on a fait un abus de notation en notant le morphisme de groupe $L_\xi(\cdot)$ sur $\mathbb{H}_1$ et l'automorphisme associé L_ξ sur $\mathfrak{h}_1$), de sorte que pour les voisinages ω de ξ contenus dans la boule de centre ξ et de rayon $\delta/2$ on obtient,

$$\frac{1}{\lambda} H_c\big(L_\xi(\omega)\big) \leq H_g(\omega) \leq \lambda H_c\big(L_\xi(\omega)\big)$$

soit

$$\frac{1}{\lambda}\big(\det G_{\mathcal{H}}(\xi)\big) H_c(\omega) \leq H_g(\omega) \leq \lambda\big(\det G_{\mathcal{H}}(\xi)\big) H_c(\omega)$$

on en déduit que $dH_g(\xi) = \det G_{\mathcal{H}}(\xi) dH_c$ ❑

Remarque $\mathbb{IV}$**.19.** En vertu de quoi on appellera forme volume associée la forme

$$d\mu_g = \det(G_{\mathcal{H}})\, dx\, dy\, dz.$$

II.1.b Cas des $\mathbb{H}_n$, pour $n > 1$

On reprend les notations de I.2 ici aussi. On considère une métrique de la forme

$$g = \sum_{i=1}^{n} g_{ij}\alpha_i\alpha_j + g_{i(j+n)}\alpha_i\beta_j + g_{(i+n)j}\beta_i\alpha_j + g_{(i+n)(j+n)}\beta_i\beta_j$$

On va lui associer la mesure

$$\mu_g = \int_\Omega (\det G)^{\frac{n+1}{2n}}(x) dx$$

Remarque $\mathbb{IV}$**.20.** Cette mesure est aussi issue de la forme volume associée à la métrique riemannienne définie par

$$g_{rie} = \sum_{i=1}^{n} g_{ij}\alpha_i\alpha_j + g_{i(j+n)}\alpha_i\beta_j + g_{(i+n)j}\beta_i\alpha_j + g_{(i+n)(j+n)}\beta_i\beta_j + (\det G)^{\frac{1}{n}}\omega$$

Est-ce la mesure de Haussdorff $2n + 2$-dimensionnelle associée à la distance sous-riemannienne d_g ?

II.2 Énoncés des résultats

II.2.a — Dans ce qui suit on note δ_ρ la famille de dilatations associées au groupe de Heisenberg telles que $\delta_\rho(x, y, z) = (\rho x, \rho y, \rho^2 z)$. On se donne une métrique sous-riemannienne sur $\mathbb{R}^{2n+1}$ invariante par l'action à gauche de Γ_r.

Transposons dans ce cas les résultats du deuxième chapitre. On rappel que μ_∞ est la mesure de Haar telle que, pour un domaine fondamental D_r pour l'action de Γ_r on ait :

$$\mu_\infty(D_r) = \mu_g(D_r)$$

alors

Lemme $\mathbb{IV}$.21.
Soit f une fonction dans $L^1(A, \mu_g)$, où A est un sous ensemble compact de $\mathbb{R}^{2n+1}$ ayant un bord de mesure nulle pour μ_g, alors

$$\frac{1}{\rho^{2n+2}} \int_{\delta_R A} f \circ \xi_\rho(x)\, d\mu_g(x) = \int_A f(x) \underbrace{\det{}^{\frac{n+1}{2n}} G \circ \delta_\rho(x)\, dx}_{d\mu_\rho(x)} \underset{R\to+\infty}{\longrightarrow} \int_A f\, d\mu_\infty \tag{$\mathbb{IV}$-14}$$

On rappel que $d_\rho(x, y) = d_g\big(\delta_\rho(x), \delta_\rho(y)\big)/\rho$ alors :

Théorème $\mathbb{IV}$.22.
Soit A un compact de $\mathbb{R}^{2n+1}$, alors la suite $(A, d_\rho, \mu_\rho)_\rho$ converge au sens de Gromov-Hausdorff mesuré vers (A, d_s, μ_∞).

Sans oublier le cas particulier des boules :

Théorème $\mathbb{IV}$.23.
On a la convergence au sens de Gromov-Haussdorff mesuré du filet $\big(\delta_{1/\rho} B_g(\rho), d_\rho, \mu_\rho\big)$ vers $\big(B_\infty(1), d_s, \mu_\infty\big)$.

Corollaire $\mathbb{IV}$.23.bis
On a la convergence et la limite suivante

$$\lim_{\rho\to+\infty} \frac{\mu_g\big(B_g(\rho)\big)}{\rho^{2n+2}} \to \mu_\infty\big(B_\infty(1)\big)$$

que l'on appelera volume asymptotique sous-riemannien.

Remarque $\mathbb{IV}$.24. Ce resultat, tout comme son analogue dans le cas du tore, est démontré par P. Pansu dans [Pan83].

II.2.b — Nous terminons cette partie par l'énoncé dans ce cas du théorème $\mathbb{III}$.19 :

Théorème $\mathbb{IV}$.25.
Soit $(\Gamma_r\backslash\mathbb{H}_n, \mathcal{H}_n, g)$ le quotient compact d'un groupe de Heisenberg, muni d'une métrique sous-riemannienne g sur la distribution $\mathcal{H}_n$. Notons d_g la distance sous-riemannienne, $B_g(\rho)$ les boules centrées en l'identité, de rayon ρ, induites sur $\mathbb{H}_n$ et $\lambda_i\big(B_g(\rho)\big)$ la $i^{ème}$ valeur propre du laplacien sous-riemannien pour le problème de Dirichlet sur $B_g(\rho)$.

Alors, il existe un opérateur hypoelliptique Δ_∞, le laplacien de Kohn associé à une métrique sous-riemannienne invariante à gauche sur $\mathbb{H}_n$, tel qu'en notant λ_i^∞

sa $i^{ème}$ valeur propre pour le problème de Dirichlet sur la boule unité de la distance d_∞ issue de la norme stable on ait :

$$\lim_{\rho\to\infty} \rho^2\lambda_i\big(B_g(\rho)\big) = \lambda_i^\infty$$

II.3 Sur le volume asymptotique

Dans cette partie nous voulons montrer que, comme pour le cas des tores, on obtient une inégalité sur le volume asymptotique. Malheureusement il n'existe pas d'équivalent au théorème de Faber-Krahn en géométrie sous-riemannienne pour l'instant. Bien qu'il y ait des inégalités du même type, elles ne sont pas optimales comme pour le cas d'égalité dans le théorème de Faber-Krahn qui n'a lieu que pour les boules. Ainsi nous n'obtenons pas pour l'instant de conclusion concernant le cas d'égalité dans notre inégalités. Voila ce que nous obtenons :

II.3.a — Commençons par le cas riemannien :

Théorème $\mathbb{IV}$.26.
Soit $(\mathbb{H}_n, \mathcal{H}_n, g)$ un groupe de Heisenberg muni d'une métrique riemannienne relevée d'une métrique riemannienne d'un quotient co-compact. Alors son volume asymptotique riemannien vérifie :

$$\mathrm{Volas}(g) \geq \frac{\mu_g(D_f)}{\mu_2(D_f)}\mu_2\big(B_2(1)\big)$$

où μ_g est la mesure riemannienne associée a g, μ_2 une mesure sous-riemannienne associée à une métrique sous-riemannienne invariante à gauche, issue du tore d'Albanese de $\mathbb{H}_n$, dont $B_2(1)$ est la boule géodésique de rayon 1 et D_f un domaine fondamental pour l'action co-compact.

Preuve. Soit $\big(H_1(V,\mathbb{R}), \|\cdot\|_s\big)$ l'espace d'homologie du quotient compact V muni de la norme stable, c'est le dual de l'espace de cohomologie $\big(H^1(V,\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\big)$ muni du quotient de la norme L^∞ des 1-formes. Considérons la norme L^2 sur les 1-formes, notée $\|\cdot\|_2$ (à normalisation près), par l'inégalité de Hölder pour toute 1-forme α

$$\|\alpha\|_2 \leq \|\alpha\|_\infty \qquad (\mathbb{IV}\text{-}15)$$

l'inégalité étant valable pour les formes harmoniques, en utilisant le théorème de Hodge-de Rham elle passe au quotient et par dualité on obtient (notations évidentes)

$$\|\gamma\|_s \leq \|\gamma\|_2^*$$

pour tout $\gamma \in H^1(V,\mathbb{R})$, après identification du H^1 avec $\mathcal{H}_n$ (cf. [CE48] et [Nom54]) il vient que, pour les distances sous-riemanniennes associées d_2 et d_∞, on a l'inégalité

$$d_\infty(0,x) \leq d_2(,.x)$$

de sorte que la boule de rayon 1 pour d_2 est incluse dans la boule de la distance «stable». Ainsi pour toute mesure :

$$\mu\big(B_\infty(1)\big) \geq \mu\big(B_2(1)\big)$$

en particulier cela est vrai pour la mesure μ_2 induite par $\|\gamma\|_2^*$ qui est sous-riemannienne invariante à gauche. En multipliant de part et d'autre par $\mu_g(D_f)/\mu_2(D_f)$ on conclut. ❏

Remarque $\mathbb{IV}$**.27.** Cette inégalité est surtout intéressante en dimension 2 où $\mu_2\big(B_2(1)\big)$ ne dépend pas de la métrique de départ, c'est l'équivalent de la constante b_n, le volume euclidien de la boule unitaire euclidienne, du cas des tores. On peut remarquer que la démonstration reste valable pour toute distance sous-riemannienne invariante à gauche dont la boule unité est incluse dans celle de la norme stable. Cependant dans le cas particulier de la démonstration faite ici on retrouve le rôle particulier joué par le tore d'Albanese du groupe de Heisenberg.

Que peux-t-on dire du cas d'égalité ?

Remarque $\mathbb{IV}$**.28.** La démonstration utilise juste le fait que $\mathcal{H}_n$ est une nilvariété, en sorte que le théorème est valable pour toutes les nilvariétés.

II.3.b — Il reste le cas sous-riemannien. La démonstration précédente échoue pour plusieurs raisons.

- La norme stable est dans ce cas le quotient de la norme L^∞ des 1-formes restreintes à la distribution $\mathcal{H}_n$. De même l'équivalent de la norme L^2 n'est défini que sur le dual de $\mathcal{H}_n$.
- Il n'y a pas actuellement d'équivalent du Théorème de Hodge-de Rham, excepté pour le cas invariant à gauche, en géométrie sous-riemannienne. De sorte que le passage au quotient de l'inégalité ($\mathbb{IV}$-15) n'est pas évident.

Cependant, si une telle inégalité faisait surface dans ce cas, elle serait l'équivalent de l'inégalité de la proposition $\mathbb{III}$.25.

Annexe A Problèmes liées

A.1 Noyau de la chaleur en grands temps

Soit (T^n, g) un tore et $(\mathbb{R}^n, \tilde{g})$ son revêtement universel muni de la métrique relevée. On rappel que $g_\rho = (1/\rho^2)\delta_\rho^* \tilde{g}$ sont les métriques ré-échelonnées et Δ_ρ leur laplacien sur $\mathbb{R}^n$.

Nous allons étudier, du point de vue de l'homogénéisation, le comportement du noyau de la chaleur sur le revêtement universel en temps long, i.e. on s'intéresse au comportement quand t tend vers l'infini d'une solution $u(t,x)$ au problème

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \Delta u = 0 & \text{dans }]0,+\infty[\times \mathbb{R}^n \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases} \tag{A.1}$$

Pour une vision utilisant la probabilité on consultera M. Kotani et T. Sunada [KS00].

Introduisons les fonctions ré-échelonnées

$$u_\rho(t,x) = \rho^n u(\rho^2 t, \delta_\rho x), \ \ \rho > 0$$

alors il est immédiat (cf. $\mathbb{II}$.8) que u est solution de A.1 si, et seulement si, u_ρ est solution de

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_\rho}{\partial t} + \Delta_\rho u_\rho = 0 & \text{dans }]0,+\infty[\times \mathbb{R}^n \\ u_\rho(0,x) = \rho^n u_0(\delta_\rho x) \end{cases} \tag{A.2}$$

de sorte que l'étude de $u(t,\cdot)$ quand t tend vers l'infini se ramène à l'étude de $u_\rho(1,\cdot)$ quand $\rho \to \infty$; autrement dit à l'étude de la suite spéctrale liée aux opérateurs (Δ_ρ) sur $\mathbb{R}^n$. On a alors

Théorème A.1.
La suite des résolvantes (R_λ^ρ) converge faiblement vers la résolvante (R_λ^∞) de Δ_∞ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Remarque A.2. La démonstration est la même que celle de $\mathbb{II}$.30. En fait on parlera plutot de *G-convergence* dans ce cas-ci. On peut appliquer les théorèmes du chapitre III de [ZKON79], en particulier les théorèmes 4 et 6.

Théorème A.3 ([ZKON79] page 136).
La solution fondamentale $k(t,x,y)$ de A.1 admet le développement asymptotique suivant

$$k(t,x,y) = k_\infty(t,x,y) + t^{-\frac{n}{2}}\theta(t,x,y)$$

où $k_\infty(t,x,y)$ est la solution fondamentale de

$$\frac{\partial u_\infty}{\partial t} + \Delta_\infty u_\infty = 0 \textit{ dans }]0,+\infty[\times \mathbb{R}^n \tag{A.3}$$

et $\theta(t,x,y) \to 0$ uniformément quand $t \to \infty$ sur $|x|^2 + |y|^2 \leq at$, pour toute constante $a > 0$ fixée.

Remarque A.4. Cet énoncé est légèrement plus faible que l'énoncé du théorème 1 de M. Kotani et T. Sunada dans [KS00].

Théorème A.5 ([ZKON79] page 138).
Soit $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Alors la solution $u(t,x)$ de A.1 admet le développement asymptotique suivant, quand $t \to +\infty$,

$$u(t,x) = c_0(4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} u_0(y)dy + t^{-\frac{n}{2}}\theta(t,x) \tag{A.4}$$

où $\theta(t,x)$ converge uniformément vers 0 pour $|x| < R$, où R est une constante positive et c_0 est le déterminant de la matrice associée à Δ_∞.

Ce dernier énoncé peut être précisé comme suit :

Théorème A.6 (Duro, Zuazua [DZ00]).
Soit $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Alors la solution unique de A.1 vérifie pour tout $p \in [1, +\infty[$:

$$t^{n/2(1-1/p)}\|u(t) - u_\infty(t)\|_p \to 0, \text{ quand } t \to +\infty \tag{A.5}$$

où u_∞ est la solution unique du problème homogénéisé (A.3). Pour $n = 1$ et $n = 2$, A.5 est vraie aussi pour $p = \infty$.

A.2 Convergence spectrale d'une famille de revêtement d'un tore

Étudions à présent le revêtement à k^n feuillets d'un tore riemannien induit par l'homothétie de centre 0 est de rapport k sur $\mathbb{R}^n$ i.e.

$$\begin{array}{rcl} \overline{\delta}_k : \mathbb{T}^n & \to & \mathbb{T}^n \\ \overline{x} & \mapsto & \overline{k \cdot x} \end{array}$$

Si on remonte la métrique g, on obtient une métrique $\tilde{g}_k$ sur le tore, telle que le volume soit $\mathrm{Vol}_{\tilde{g}_k}(\mathbb{T}^n) = k^n \,\mathrm{Vol}_g(\mathbb{T})$. On voit donc de manière naturelle apparaître le ré-échelonnage en prenant la métrique $g_k = (1/k^2)\tilde{g}_k$, dont le volume est $\mathrm{Vol}_g(\mathbb{T})$.

A présent concentrons nous sur les distances induites par g_k que l'on notera d_k. Le théorème $\mathbb{III}$.4 nous dit précisément que la suite des tores $(\mathbb{T}^n, d_k, \mu_k)$ converge au sens de Gromov-Haussdorff mesuré vers le tore $(\mathbb{T}^n, d_\infty, \mu_\infty)$, muni de la distance issue de la norme stable et de la mesure de Haar tel que $\mu_\infty(\mathbb{T}) = \mathrm{Vol}_g(\mathbb{T})$.

Cependant, en ce qui concerne l'énergie des fonctions et le comportement du laplacien, l'étude faite pour les boules pouvant être faite pour un domaine fondamental, on s'aperçoit que cette suite converge vers le tore d'Albanese, i.e. le tore $(\mathbb{T}^n, d_A, \mu_A)$ où d_A est la distance issue du produit scalaire défini en I.2, ceci au sens de la distance $\mathcal{D}$ introduite par A. Kasue et H. Kimura. En effet, nous obtenons ici la Γ-convergence des énergies de Dirichlet, ce qui induit, suivant le théorème 2.1 de [KKO97], la convergence suivant la distance $\mathcal{D}$.

La question restant en suspend, est de savoir s'il y a aussi convergence au sens de la distance spectrale introduite par P. Bérard, G. Besson et S. Gallot dans [BBG94].

Bibliographie

[BBG94] **P. Bérard**, **G. Besson**, et **S. Gallot**. « Embedding Riemannian manifolds by their heat kernel ». *GAFA*, 4(4) :373–398, 1994.

[BCG95] **G. Besson**, **G. Courtois**, et **S. Gallot**. « Entropies et rigidités des espaces localement symétriques de courbure strictement négative ». *GAFA*, 5(5) :731–799, 1995.

[BD98] **A. Braides** et **A. Defranceschi**. *Homogenization of Multiple Integrals*. Oxford Science Publications, 1998.

[Ber86] **P. H. Berard**. *Spectral Geometry : Direct and Inverse Problems*. Numéro 1207 dans Lecture Notes Math. Springer Verlag, 1986.

[BGG00] **R. Beals**, **B. Gaveau**, et **C. Greiner**. « Hamilton-Jacobi theory and the heat kernel on Heisenberg groups ». *J. math. Pures Appl.*, 79(7) :633–689, 2000.

[BI94] **D. Burago** et **S. Ivanov**. « Riemannian tori without conjugate points are flat ». *GAFA*, 4(3) :259–269, 1994.

[BI95] **D. Burago** et **S. Ivanov**. « On asymptotic volume of tori ». *GAFA*, 5(5) :800–808, 1995.

[BLP78] **A. Bensousan**, **J.-L. Lions**, et **G. Papanicolaou**. *Asymptotic analysis for periodic structures*. Studies in mathematics and its applications. North Holland, 1978.

[BMT96] **M. Biroli**, **U. Mosco**, et **N. A. Tchou**. « Homogenization for degenerate operators with periodical coefficients with respect to the Heisenberg group ». *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 322, Série I :439–444, 1996.

[BMT97] **M. Biroli**, **U. Mosco**, et **N. A. Tchou**. « Homogenization by the Heisenberg group ». *Advances in Mathematics*, 7 :809–837, 1997.

[Bow58] **F. Bowman**. *Introduction to Bessel Functions*. Dover, 1958.

[BPT98] **M. Biroli**, **C. Picard**, et **N. A. Tchou**. « Homogenization of the p-laplacian Associated with the Heisenberg Group ». *Rendiconti Accademia Nazionale delle Scienze*, XXII(116) :23–42, 1998.

[Bre93] **H. Brezis**. *Analyse fonctionnelle*. Masson, 4^{e}édition, 1993.

[Bur92] **D. Burago**. « Periodic metrics ». *Advances in soviet mathematics*, 9 :205–210, 1992.

[CE48] **C. Chevalley** et **S. Eilenberg**. « Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras ». *Trans. Am. Math. Soc.*, 63 :85–124, 1948.

[Cen00] **P. Centore**. « Finsler Laplacians and Minimal-Energy maps ». *International Journal of Mathematics*, 11(1) :1–13, 2000.

[Cha94] **I. Chavel**. *Riemannian geometry : a modern introduction*. Cambridge tracts in mathematics. Cambridge University Press, 1994.

[Dan91] **D. Danielli**. « A compact embedding theorem for a class of degenerate Sobolev space ». *Rend. Sem. Mat. Politec. Torino*, 49 :339–420, 1991.

[DZ00] **G. Duro** et **E. Zuazua**. « Large Time Behavior for Convection-Diffusion Equations in $\mathbb{R}^n$ with Periodic Coefficients ». *Journal of Differential Equation*, 167 :275–315, 2000.

[Fed69] **H. Federer**. *Geometric Measure Theory*. Springer Verlag, 1969.

[Fol84] **G.B. Folland**. *Real analysis*. Wiley-interscience, 1984.

[FS74] **G.B. Folland** et **E.M. Stein**. « Estimates for the $\bar{\partial}_b$ complexe and Analysis on the Heisenberg Group ». *Comm. in Pure and Applied Math.*, XXVII :429–522, 1974.

[FSC97] **B. Franchi**, **R. Serapioni**, et **F. Serra Cassano**. « Approximation and Imbedding Theorems for Weighted Sobolev Spaces Associated with Lipschitz Continuous Vector Fields ». *Bol. U.M.I*, 11-B(7) :83–117, 1997.

[Fuk90] **Fukaya**. Haussdorff Convergence of Riemann Manifold and its application. Dans **T. Ochiai**, éditeur, *Recent topic in Differential and Analytic Geometry*, volume 18-I de *Advanced Studies in Pure Mathematics*, pages 143–238. 1990.

[Gav77] **B. Gaveau**. « Principe de moindre action, propagation de la chaleur et éstimées sous elliptiques sur certains groupes nilpotents ». *Acta Math.*, 139 :95–153, 1977.

[GHL90] **S. Gallot**, **D. Hulin**, et **J. Lafontaine**. *Riemannian geometry*. Universitext. Springer-Verlag, seconde édition, 1990.

[Gre79] **D. Greenburg**. *How to be a Jewish Mother (a very lovely training manual)*. Price/Stern/Sloan, huitième édition, 1979.

[Gro81] **M. Gromov**. « Groups of polynomial growth and expanding maps ». *Publ. Math. de l'I.H.E.S.*, 53 :53–78, 1981.

[GW86] **C.S. Gordon** et **E.N. Wilson**. « The spectrum of the Laplacian on Riemannian Heisenberg manifolds ». *Michigan Math. J.*, 33 :253–271, 1986.

[KKO97] **A. Kasue**, **H. Kumura**, et **Y. Ogura**. « Convergence of heat kernels on a compact Manifold ». *Kyushu J. Math*, 51 :453–524, 1997.

[KS] **K. Kuwae** et **T. Shioya**. « Convergence of spectral structures : a functional analytic theory and its applications to spectral geometry. ». prépublication.

[KS00] **M. Kotani** et **T. Sunada**. « Albanese Maps and Off Diagonal Long Time Asymptotics for the Heat Kernel ». *Commun. Math. Phys.*, 209 :633–670, 2000.

[Laf74] **J. Lafontaine**. « Sur le volume de la variété de Jacobi d'une variété riemannienne ». *C. R. Acad. Sc. Paris*, 278 :1519–1522, 1974.

[Mas93] **Dal Maso**. *An Introduction to Γ-convergence*. Birkhäuser, 1993.

[Mas96] **D. Massart**. « *Normes stables des surfaces* ». Thèse de doctorat, École Normale Superieure de Lyon, 1996.

[Mat51] **Y. Matsushima**. « On the discrete subgroups and homogeneous spaces of nilpotent Lie groups ». *Nagoya Journ. Math.*, 2, 1951.

[Mon] **R. Montgomery**. « A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications ». voir http ://orca.ucsc.edu/˜rmont/sR.html.

[Mos94] **U. Mosco**. « Composite media and asymptotic Dirichlet forms ». *J. Funct. Anal.*, 123(2) :368–421, 1994.

[MS86] **V. D. Milman** et **G. Schechtman**. *Asymptotic Theory of finite dimensional Normed Spaces*. Numéro 1200 dans Lecture Notes Math. Springer Verlag, 1986.

[Nom54] **K. Nomizu**. « On the cohomology of compact homogeneous spaces of nilpotent Lie groups ». *Annals of Math.*, 59(3) :531–538, 1954.

[Pan82] **P. Pansu**. « *Geometrie du groupe de Heisenberg* ». Thèse de docteur 3ème cycle, Université Paris VII, 1982.

[Pan83] **P. Pansu**. « Croissance des boules et des géodésiques fermées dans les nilvariétés ». *Ergod. Th & Dynam. Sys.*, 3 :415–445, 1983.

[Pan99] **P. Pansu**. « Profil isopérimétrique, métriques périodiques et formes d'équilibre des cristaux ». prépublication d'orsay, 1999.

[Rud91] **W. Rudin**. *Functional Analysis*. International series in Pure and Applied Mathematics. Mc Graw-Hill, seconde édition, 1991.

[Sav] **A. Savo**. « Lower bounds for the nodal length of eingenfunctions of the laplacian ». prépublication.

[Str86] **R. Strichartz**. « Sub-Riemannian geometry ». *J. Differential Geom.*, 24 :221–263, 1986.

[Str89] **R. Strichartz**. « correction to Sub-Riemannian geometry ». *J. Differential Geom.*, 30 :595–596, 1989.

[ZKON79] **V.V. Zhikov**, **S.M. Kozlov**, **O.A. Oleinik**, et **Kha T'en Ngoan**. « Averaging and G-convergence of differential operators ». *Russian Math. Surveys*, 34(5) :69–147, 1979.

The Last Word by the Author's Mother

So you've read his book and, God willing, enjoyed it. Do I have to tell you how proud a mother would be of a son like that ? I don't. Now maybe he'll give up all this foolishness and go into a worthwhile profession.

Par la mère de Dan Greenburg dans
How to be a Jewish Mother

Résumé

Considérons une nilvariété graduée munie d'une métrique riemannienne (resp. sous-riemannienne), on relève la métrique sur le revêtement universel, on obtient ainsi une distance qui à son tour définit des boules. Sur ces boules on peut étudier le laplacien (resp. un sous-laplacien). On se concentre sur son spectre pour le problème de Dirichlet. On décrit, en utilisant les outils de l'homogénéisation, le comportement asymptotique des valeurs propres quand le rayon des boules tend vers l'infini. On obtient également une minoration du volume asymptotique des boules faisant intervenir le tore d'Albanese. Dans le cas particulier des tores, on étudie aussi le spectre de Neumann et on caractérise les tores plats grâce à l'asymptotique de la première valeur propre du laplacien pour le problème de Dirichlet. On explore aussi le cas des groupes de Heisenberg.

Mots-clés

Nilvariété, homogénéisation, spectre du laplacien, norme stable, tore d'Albanese, volume asymptotique.

Classification mathématique

53C24, 58C40, 74Q99.