Correction

DEUG MIAS 1999-2000

Exercice 5 : [Aplications] Soit h définit par :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ (p,q) & \mapsto & \dfrac{(p+q)(p+q+1)}{2}+p \end{array}$$

Montrer que h est une bijection.

Solution : On remarque d'abord que h est bien une fonction à valeurs entières puisque $p+q$ et $p+q+1$ sont deux entiers qui se suivent donc l'un des deux est pair.

Ensuite en posant $p+q=b$ et en fixant b, p peut varier entre 0 et b. On observe alors qu'à b fixé

$$\frac{b(b+1)}{2} \leq h(p,q) = h(p,b-p) \leq \frac{(b+1)(b+2)}{2} - 1 \tag{1}$$

Injectivité : Supposons que l'on ait p, q, p' et q' tels que $h(p,q)=h(p',q')$ alors on pose $a=p+q$ et $b=p'+q'$ du coup on obtient les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{(p+q)(p+q+1)}{2}+p &= \frac{(p'+q')(p'+q'+1)}{2}+p' \\ \frac{a(a+1)}{2}+p &= \frac{b(b+1)}{2}+p' \qquad (2) \end{aligned}$$

Supposons de plus que $a<b$ i.e. $a+1\leq b$ alors par la remarque (1)

$$\frac{a(a+1)}{2}+p < \frac{(a+1)(a+2)}{2} \leq \frac{b(b+1)}{2} \leq \frac{b(b+1)}{2}+p'$$

ce qui contredit (2) donc $a=b$. On réinjecte ceci dans l'équation (2) pour obtenir $p=p'$, on en déduit que $q=q'$ par définition de a et b.

Surjectivité :(rédaction succincte) Soit $n\in\mathbb{N}$ on observe qu'il existe a tel que

$$\frac{a(a+1)}{2} \leq n \leq \frac{(a+1)(a+2)}{2} - 1$$

du coup par la remarque (1), on aura $p+q=a$, ensuite en faisant varier p on balaye tout l'intervalle $[a(a+1)/2\ldots(a+1)(a+2)/2-1]$. Précisément il faudra poser $p=n-a(a+1)/2$ et $q=a-n+a(a+1)/2$.

Exercice 8 : [Sous-ensembles de $\mathbb{R}$] Soient I, E deux ensembles, $(A_i)_{i\in I}$, $(B_i)_{i\in I}$ deux familles de parties de E. Établir :

$$\underbrace{\bigcap_{X\in\mathcal{P}(I)}\left(\left(\bigcup_{i\in X}A_i\right)\cup\left(\bigcup_{j\in \complement_I^X}B_j\right)\right)}_{A}=\underbrace{\bigcup_{i\in I}A_i\cap B_i}_{B}$$

Solution : Nous allons montrer que $A\subset B$ et $B\subset A$.

<u>$B\subset A$:</u> (On commence par le plus simple) Soit $x\in B$, alors il existe $i_0\in I$ tel que $x\in A_{i_0}\cap B_{i_0}$. Considérons $X\in\mathcal{P}(I)$ alors

- soit $i_0\in X$ et alors $x\in\bigcup_{i\in X}A_i$
- soit $i_0\in\complement_I^X$ et alors $x\in\bigcup_{j\in\complement_I^X}B_j$ dans tous les cas on a

$$x\in\left(\bigcup_{i\in X}A_i\right)\cup\left(\bigcup_{j\in\complement_I^X}B_j\right)$$

ceci étant vrai pour toute partie X de I on obtient bien que $x\in A$ donc $B\subset A$.

<u>$A\subset B$:</u> Soit $x\in A$, alors

$$\forall X\in\mathcal{P}(I),(\exists i\in X \text{ tel que } x\in A_i) \text{ ou } (\exists j\in\complement_I^X \text{ tel que } x\in B_j)$$

en particulier pour $X=I$ on obtient $\exists i\in I$ tel que $x\in A_i$.

Donc l'ensemble $I_x=\{i\in I\mid x\in A_i\}$ n'est pas vide et $\complement_I^{I_x}$ est une partie de I, donc

$$(\exists i\in\complement_I^{I_x} \text{ tel que } x\in A_i) \text{ ou } (\exists j\in I_x \text{ tel que } x\in B_j)$$

or si $i\in\complement_I^{I_x}$ alors $x\notin A_i$ par définition de I_x, donc nécessairement $\exists j\in I_x$ tel que $x\in B_j$ et par définition de I_x cela implique que $x\in A_j\cap B_j$, c'est-à-dire que l'on vient d'extirper un $j\in I$ tel que $x\in A_j\cap B_j$, donc par définition de B cela veut exactement dire que $x\in B$ donc on a bien $A\subset B$ ce qui conclut la solution.

Remarque. Vous voyez beaucoup de signe $\Rightarrow$ ou $\Leftrightarrow$? non, et comme vous les utilisez, le plus souvent, à tort vous feriez mieux de faire comme moi. Tiens pour la peine ♡.

Exercice 4 : [Sous-ensembles de $\mathbb{R}$] Soit A une partie bornée non-vide de $\mathbb{R}$; montrer :

$$\operatorname{Sup}_{(x,y)\in A\times A}|x-y|=\operatorname{Sup}(A)-\operatorname{Inf}(A)$$

Solution : Au moins deux méthodes possibles.

<u>Méthode 1 :</u> Remarquons que si A ne possède qu'un élément le résultat est immédiat, les deux membres valant 0. Donc nous supposons désormais que A possède au moins deux éléments (remarque, si il n'y a que deux éléments le résultat est immédiat).

Par définition de la borne sup et de la borne inf, pour tout $\varepsilon>0$ on peut trouver x et y dans A tels que :

$$\begin{array}{rcccl}\operatorname{Sup}(A)-\frac{\varepsilon}{2} & \leq & x & \leq & \operatorname{Sup}(A)\\ \operatorname{Inf}(A) & \leq & y & \leq & \operatorname{Inf}(A)+\frac{\varepsilon}{2}\end{array}\tag{3}$$

Comme on a de plus supposé qu'il y avait au moins deux éléments, en prenant ε suffisament petit on aura $\mathrm{Sup}(A) - \varepsilon > \mathrm{Inf}(A) + \varepsilon$ de sorte que dans ce cas $|x-y| = x-y$. On obtient en faisant la différence des deux inégalités de (3)

$$\mathrm{Sup}(A) - \mathrm{Inf}\, A - \varepsilon \leq x - y \leq \mathrm{Sup}(A) - \mathrm{Inf}(A)$$

autrement dit pour tout ε suffisament petit il existe x et y dans A tels que

$$\mathrm{Sup}(A) - \mathrm{Inf}\, A - \varepsilon \leq |x - y| \leq \mathrm{Sup}(A) - \mathrm{Inf}(A)$$

ce qui conclut notre première méthode.

Méthode 2 : Soit I un minorant de A et S un majorant de A alors $S - I$ est un majorant de $B = \{|x-y| \mid x,y \in A\}$. Comme la borne sup de B est le plus petit des majorants, on obtient que $\mathrm{Sup}(B) \leq S - I$ ceci pour tout majorant S et minorants I de A. En prenant le plus petit des majorants on trouve $\mathrm{Sup}(B) \leq \mathrm{Sup}(A) - I$, pour tout les minorants I de A. Donc en prenant le plus grand des minorants de A on obtient

$$\mathrm{Sup}(B) \leq \mathrm{Sup}(A) - \mathrm{Inf}(A) \tag{4}$$

Réciproquement : Soit M un majorant de B, ceci signifie que

$$\forall x,y \in A, \quad |x-y| \leq M$$

autrement dit

$$\forall x,y \in A, \quad y - M \leq x \leq M + y$$

donc en particulier $x \leq M + y$, donc en prenant l'inf sur les y on trouve

$$x \leq M + \mathrm{Inf}(A)$$

puis en prenant le sup sur les x on obtient

$$\mathrm{Sup}(A) \leq M + \mathrm{Inf}(A)$$

et ceci pour tous les majorants M de B donc en particulier pour le plus petit d'entre eux d'où

$$\mathrm{Sup}(A) \leq \mathrm{Sup}(B) + \mathrm{Inf}(A) \tag{5}$$

donc en combinant les inégalités (4) et (5) on obtient l'égalité prisée.