

Continuité et dérivabilité des fonctions

DEUG MIAS 1999-2000 TD du 17/11/99

Exercice 1 : Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} , à quelles conditions est-elle continue en 1? Sur \mathbb{R} ? A quelles conditions n'est-elle pas continue sur \mathbb{R} ?

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle, on suppose qu'elle converge, en déduire que la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = f(u_n)$ est elle aussi convergente. Ceci est-il encore vrai si f n'est pas continue? Que dire de la réciproque?

Exercice 3 : Soient f et g deux fonctions réelles à valeurs réelles qui coïncident sur \mathbb{Q} montrer qu'elles sont égales sur \mathbb{R} .

Exercice 4 : Soit f une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{N} , montrer qu'elle est constante.

Exercice 5 : Soit g une fonction continue de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , montrer que les fonctions $f(x) = g(5x)$ et $h(x) = g(\cos x)$ sont continues.

Exercice 6 : Existe-t-il des fonctions continues sur \mathbb{R} telles que l'image de $[0,1]$ soit $[0,2] \cup [3,4]$?

Exercice 7 : Trouver toutes les applications continues $f : [0,1] \rightarrow [0,1]$ telles que $f \circ f = f$

Exercice 8 : Étudier la continuité, la dérivabilité, la continuité de la dérivée, pour les applications de \mathbb{R} dans \mathbb{R} suivantes :

8.a $f : x \mapsto x|x|$

8.b $f : x \mapsto \begin{cases} x \sin(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

Exercice 9 : Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, la dérivée $n^{\text{ème}}$ des applications suivantes :

9.a $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définit par $x \mapsto e^x \cos x$

9.b $f : \mathbb{R} - \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2 + 1}{(x + 1)^3}$

9.c $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^2(1 + x)^n$

Exercice 10 : Soient I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable à gauche et à droite en tout point de I ; montrer que f est continue sur I . f est-elle dérivable?