Continuité et dérivabilté des fonctions

DEUG MIAS 1999-2000 TD du 17/11/99

Exercice 1 : Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, à quelles conditions est-elle continue en 1? Sur $\mathbb{R}$? A quelles conditions n'est-elle pas continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle, on supose qu'elle converge, en déduire que la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = f(u_n)$ est elle aussi convergente. Ceci est-il encore vrai si f n'est pas continue? Que dire de la réciproque?

Exercice 3 : Soient f et g deux fonctions réelles à valeurs réelles qui coïncident sur $\mathbb{Q}$ montrer qu'elles sont égales sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : Soit f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{N}$, montrer qu'elle est constante.

Exercice 5 : Soit g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que les fonctions $f(x) = g(5x)$ et $h(x) = g(\cos x)$ sont continues.

Exercice 6 : Existe-t-il des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que l'image de $[0,1]$ soit $[0,2] \cup [3,4]$?

Exercice 7 : Trouver toutes les applications continues $f : [0,1] \to [0,1]$ telles que $f \circ f = f$

Exercice 8 : Étudier la continuité, la dérivabilité, la continuité de la dérivée, pour les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ suivantes :

8.a $f : x \mapsto x|x|$

8.b $f : x \mapsto \begin{cases} x \sin(1/x) \text{ si } x \neq 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

Exercice 9 : Déterminer, pour $n \in \mathbb{N}$, la dérivée $n^{\text{éme}}$ des applications suivantes :

9.a $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définit par $x \mapsto e^x \cos x$

9.b $f : \mathbb{R} - \{-1\} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^2+1}{(x+1)^3}$

9.c $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2(1+x)^n$

Exercice 10 : Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application dérivable à gauche et à droite en tout point de I ; montrer que f est continue sur I. f est-elle dérivable?