Ensembles

DEUG MIAS 1999-2000

Dans toute la suite E sera un ensemble, et pour toute partie A dans E on notera $\complement_E^A = \{x \in E \mid x \notin A\}$ le complémentaire de A dans E.

Exercice 1 : Soient A et B deux parties de E, montrer que

* $A \subset B \Leftrightarrow \complement_E^A \subset \complement_E^B$
* $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow \complement_E^A \cup \complement_E^B = E$

Exercice 2 : Pour deux parties A et B de E on note :
- $A - B = \{x \in E$ tels que $x \in A$ et $x \notin B\}$ la «différence».
- $A \triangle B = A - B \cup B - A$ la «différence symétrique».

Montrer que :

* $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$
* $A \triangle B = \complement_E^A \triangle \complement_E^B$
* $A \triangle B = A \cap B \Leftrightarrow A = B = \emptyset$
* Si de plus $C \subset E$ alors $A \triangle B = A \triangle C \Rightarrow B = C$

Exercice 3 : A toute partie A de E on associe sa fonction indicatrice : φ_A définie de la façon suivante :

$$\begin{array}{rccc} \varphi_A : & E & \to & \{0,1\} \\ & x & \mapsto & \left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{array} \right. \end{array}$$

3.a Montrer que $\varphi_{A \cap B} = \varphi_A . \varphi_B$; $\varphi_{A \cup B} = \varphi_A + \varphi_B - \varphi_{A \cap B}$; et enfin que $\varphi_{\complement_E^A} = 1 - \varphi_A$.

3.b Exprimer ϕ_{A-B} et $\phi_{A \triangle B}$ en fonction de ϕ_A et de ϕ_B.

3.c En utilisant les fonctions indicatrices et en remarquant que $A = B \Leftrightarrow \phi_A = \phi_B$ montrez les égalités suivantes :

* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
* $\complement_E^{A \cup B} = \complement_E^A \cap \complement_E^B$,
* $A \triangle (B \triangle C) = (A \triangle B) \triangle C$.