$\boxed{\textbf{Applications}}$

DEUG MIAS 1999-2000

Dans toute la suite E, F et G sont des ensembles. On notera $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

Exercice 1 : Soit $f : E \to F$ une application

1.a Soit $A \in \mathcal{P}(E)$; montrer que si f est injective, alors la restriction de f à A au départ et $f(A)$ à l'arrivée est bijective.

1.b Soit $B \in \mathcal{P}(F)$; montrer que, si f est surjective, alors la restriction de f à $f^{-1}(B)$ au départ et B à l'arrivée est surjective.

Exercice 2 : Soit f une application, trouvez un exemple montrant que l'on a pas toujours $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

Exercice 3 :

3.a Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications. Montrer :

* si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
* si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.

3.b Soient $f : E \to F$, $g : F \to E$ deux applications ; on suppose $g \circ f \circ g \circ f$ surjective et $f \circ g \circ f \circ g$ injective. Montrer que f et g sont bijectives.

Exercice 4 : Soit $f : E \to E$ une application. Montrer que :

* si $f \circ f \circ f = f$ alors f est injective si et seulement si f est surjective.
* si $f \circ f = f$ et si f est injective ou surjective alors $f = \mathrm{id}_E$.

Exercice 5 : Soient $f : E \to F$, $g : F \to G$ deux applications ; on considère $h : E \to F \times G$, définie par : $\forall x \in E, h(x) = \big(f(x), g(x)\big)$.

* Montrer que, si f ou g est injective il en est de même pour h.
* On suppose f, g surjectives ; h est-elle nécessairement surjective ?

Exercice 6 : Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $f_1, \ldots, f_n : E \to E$ des bijections telles que $f_1 \circ \ldots \circ f_n = \mathrm{id}_E$. Montrer que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $f_{k-1} \circ \ldots \circ f_n \circ f_1 \circ \ldots \circ f_k = \mathrm{id}_E$.