

Sous-ensembles de \mathbb{R}

DEUG MIAS 1999-2000 TD 3

Exercice 1 : Donner les majorants, minorants, bornes sup., bornes inf., plus petit élément, plus grand élément dans \mathbb{R} des ensembles suivants :

$$]0,1[, [0,1[, [0,1], [0, +\infty[, [0, \sqrt{2}[, [0, \sqrt{2}[\cap \mathbb{Q}$$

Que se passe-t-il pour le dernier si on le considère comme un sous-ensemble de \mathbb{Q} ?

Exercice 2 : Donner les bornes sup., et bornes inf. des ensembles suivants :

- * $\{(-1)^n/n \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*\}$,
- * $\{(-1)^n + 1/n \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*\}$,
- * $\{1/n \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*\}$.

Ces ensembles possèdent-ils un plus petit (resp. grand) élément?

Exercice 3 : Soient A et B deux parties de \mathbb{R} telles que pour tout couple $(a,b) \in A \times B$, $a \leq b$. Montrer que $\text{Sup}(A)$ et $\text{Inf}(B)$ existent et que de plus $\text{Sup}(A) \leq \text{Inf}(B)$

Exercice 4 : soit A une partie bornée non-vide de \mathbb{R} ; montrer :

$$\text{Sup}_{(x,y) \in A \times A} |x - y| = \text{Sup}(A) - \text{Inf}(A)$$

Exercice 5 : Pour $a \in [1, +\infty[$, simplifier $\sqrt{a + 2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a - 2\sqrt{a-1}}$

Exercice 6 : Montrer que : $\forall m, n \in \mathbb{Z}, E\left(\frac{n+m}{2}\right) + E\left(\frac{n-m+1}{2}\right) = n$.

Exercice 7 : Montrer que

- * $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
- * $\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

Exercice 8 : (A rédiger et à rendre jeudi 7 Octobre au plus tard)

Soient I, E deux ensembles, $(A_i)_{i \in I}, (B_i)_{i \in I}$ deux familles de parties de E . Établir :

$$\bigcap_{X \in \mathcal{P}(I)} \left(\left(\bigcup_{i \in X} A_i \right) \cup \left(\bigcup_{j \in \mathcal{C}_I^X} B_j \right) \right) = \bigcup_{i \in I} A_i \cap B_i$$