Sous-ensembles de $\mathbb{R}$

DEUG MIAS 1999-2000 TD 3

Exercice 1 : Donner les majorants, minorants, bornes sup., bornes inf., plus petit élément, plus grand élément dans $\mathbb{R}$ des ensembles suivants :

$$]0,1[,\ [0,1[,\ [0,1],\ [0,+\infty[,\ [0,\sqrt{2}[,\ [0,\sqrt{2}[\cap\mathbb{Q}$$

Que se passe-t-il pour le dernier si on le considère comme un sous-ensemble de $\mathbb{Q}$?

Exercice 2 : Donner les bornes sup., et bornes inf. des ensembles suivants :

* $\{(-1)^n/n \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*\}$,
* $\{(-1)^n + 1/n \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*\}$,
* $\{1/n \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*\}$.

Ces ensembles possèdent-ils un plus petit (resp. grand) élément ?

Exercice 3 : Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ telles que pour tout couple $(a,b) \in A \times B$, $a \leq b$. Montrer que $\mathrm{Sup}(A)$ et $\mathrm{Inf}(B)$ existent et que de plus $\mathrm{Sup}(A) \leq \mathrm{Inf}(B)$

Exercice 4 : soit A une partie bornée non-vide de $\mathbb{R}$; montrer :

$$\sup_{(x,y)\in A\times A} |x-y| = \mathrm{Sup}(A) - \mathrm{Inf}(A)$$

Exercice 5 : Pour $a \in [1,+\infty[$, simplifier $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}} + \sqrt{a-2\sqrt{a-1}}$

Exercice 6 : Montrer que : $\forall\, m,n \in \mathbb{Z}$, $\mathrm{E}\left(\dfrac{n+m}{2}\right) + \mathrm{E}\left(\dfrac{n-m+1}{2}\right) = n$.

Exercice 7 : Montrer que

* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$
* $\sqrt{6} - \sqrt{2} - \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$

Exercice 8 : (A rédiger et à rendre jeudi 7 Octobre au plus tard)
Soient I, E deux ensembles, $(A_i)_{i\in I}$, $(B_i)_{i\in I}$ deux familles de parties de E. Établir :

$$\bigcap_{X\in\mathcal{P}(I)} \left(\Big(\bigcup_{i\in X} A_i \Big) \cup \Big(\bigcup_{j\in \complement_I^X} B_j \Big) \right) = \bigcup_{i\in I} A_i \cap B_i$$