Suites numériques II

DEUG MIAS 1999-2000 TD 7

Exercice 1 : Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente ; montrer que l'ensemble $\{U_n; n \in \mathbb{N}\}$ admet un plus petit ou un plus grand élément.

Exercice 2 : Montrer que si $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est injective alors $f(n)$ tend vers $+\infty$.

Exercice 3 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dont les termes paires convergent vers l et les termes impaires vers l', montrer qu'une condition nécessaire et suffisante pour que la suite converge est $l = l'$.

Exercice 4 : Donner un exemple de suite réelle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergente, telle que, pour tout $k \in \mathbb{N} - \{0,1\}$, la suite $(x_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente.

Exercice 5 : On dit de deux suites qu'elles sont adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et que leur différence tend vers 0.

5.a Montrer que dans ce cas les deux suites convergent vers la même limite, l'une ayant tous ses termes supérieur à cette limite et l'autre inférieur.

5.b Montrer que ces suites sont adjacentes :

* $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}, v_n = u_n + \frac{1}{n!}$
* $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, v_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$

Exercice 6 :

6.a (Théorème de Césaro)

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite admettant l comme limite alors la suite $v_n = \dfrac{u_0 + \cdots + u_n}{n}$ converge aussi vers l.

6.b Si on suppose que $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ que pouvez-vous dire de $\sqrt[n]{u_0 \ldots u_n}$?

6.c Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes positifs tels que $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k = +\infty$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite admettant l comme limite, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k u_k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \alpha_k} = l$$