Correction du Devoir surveillé du 04/03/2000

DEUG MIAS — section 1 — module SM21

I

I.1 Donner une condition nécessaire sur l'entier relatif n pour qu'il existe des couples $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ vérifiant :

$$35x - 77y = n.$$

I.2 Déterminer tous les couples $(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ qui vérifient :

$$35x - 77y = 56.$$

Solution :

I.1 Déterminons le PGCD de 35 et -77.

$$\begin{cases} 35 = 5 \cdot 7 \\ 77 = 11 \cdot 7 \end{cases}$$

Donc le PGCD est 7 (on pouvait aussi utiliser l'algorithme d'Euclide, mais comme les nombres sont simples on peut s'en passer). On en déduit que 7 divise nécessairement n puisqu'il divise $35x - 77y$.

Remarque. A priori ceci est juste une condition nécessaire, c'est-à-dire que si il existe une solution alors 7 divise n. Mais il se peut que n soit divisible par 7 et qu'il n'y ait pas de solution. Il s'avère cependant qu'elle est aussi suffisante, grâce au théorème de Bezout, qui nous donne l'existence de x_0 et y_0 tel que $35x_0 - 77y_0 = 7$ et donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$ on obtient $35kx_0 - 77ky_0 = 7k$.

I.2 On peut simplifier les calculs en remarquant que

$$\mathbf{35}x - \mathbf{77}y = 56 \Leftrightarrow \mathbf{5}x - \mathbf{11}y = 8$$

On utilise alors l'algorithme d'Euclide pour trouver une solution particulière.

$$\begin{array}{rrcl} & \mathbf{11} & = & 2 \cdot \mathbf{5} + 1 \\ \Leftrightarrow & \mathbf{11} - \mathbf{5} \cdot 2 & = & 1 \\ \Leftrightarrow & \mathbf{11} \cdot 8 - \mathbf{5} \cdot 16 & = & 8 \end{array}$$

donc une solution particulière est le couple $(-16, -8)$. Considérons une autre solution (x,y), alors

$$\begin{array}{rrcl} & \mathbf{5}x - \mathbf{11}y & = & \mathbf{11} \cdot 8 - \mathbf{5} \cdot 16 \\ \Leftrightarrow & \mathbf{5}(x+16) & = & \mathbf{11}(8+y) \end{array}$$

Comme 5 est premier avec 11, nécessairement 5 divise $8 + y$ puiqu'il divise $11(8 + y)$, de même 11 divise $x + 16$ et nécessairement il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\frac{8+y}{5} = \frac{x+16}{11} = k$$

de sorte que les solutions sont nécessairement de la forme

$$\begin{cases} x = -16 + 11k \\ y = -8 + 5k \end{cases}$$

avec $k \in \mathbb{Z}$.
Réciproquement, soit $k \in \mathbb{Z}$ alors le couple $(-16+11k, -8+5k)$ est solution puisque

$$\mathbf{5}(-16+11k) - \mathbf{11}(-8+5k) = 8$$

Donc l'ensemble des solution est $\boxed{\mathcal{S} = \{(-16+11k, -8+5k) \mid k \in \mathbb{Z}\}}$

II

Dans $\mathbb{R}^4$, soit $F = \text{Vect}(v_1,v_2)$, où $v_1 = (0,1,2,0)$ et $v_2 = (-1,2,0,1)$, et soit $G_a = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \,:\, ax+2z-y = z-3t = 0\}$ où a est un nombre réel fixé.

II.1 Montrer que G_a est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ et en donner une base.

II.2 Déterminer, suivant les valeurs de a le sous-espace vectoriel $F \cap G_a$ en en donnant une base

II.3 Pour quelles valeurs de a les sous-espaces F et G_a sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$?

Solution :

II.1 Montrons que G_a est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

(a) $G_a \subset \mathbb{R}^4$ n'est pas vide puisque le vecteur $(0,0,0,0)$ y est.

(b) Soient $V = (x,y,z,t)$ et $V' = (x',y',z',t')$ deux éléments de G_a.

$$\begin{cases} a(x+x') + 2(z+z') - (y+y') = \underbrace{(ax+2z-y)}_{=0 \text{ car } V \in G_a} + \underbrace{(ax'+2z'-y')}_{=0 \text{ car } V' \in G_a} = 0 \\ (z+z') - 3(t+t') = \underbrace{z-3t}_{=0 \text{ car } V \in G_a} + \underbrace{z'-3t'}_{=0 \text{ car } V' \in G_a} = 0 \end{cases}$$

donc $V + V' = (x+x',y+y',z+z',t+t')$ est un éléments de G_a, autrement dit G_a est stable par addition.

(c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $V = (x,y,z,t)$ un élément de G_a.

$$\begin{cases} a(\lambda x) + 2(\lambda z) - (\lambda y) = \lambda \underbrace{(ax+2z-y)}_{=0 \text{ car } V \in G_a} = 0 \\ (\lambda z) - 3(\lambda t) = \lambda \underbrace{(z-3t)}_{=0 \text{ car } V \in G_a} = 0 \end{cases}$$

donc $\lambda V = (\lambda x,\lambda y,\lambda z,\lambda t)$ est un élément de G_a, autrement dit G_a est stable par l'action de la loi externe.

En conclusion G_a est bien un sous-espace vectoriel de R^4. Déterminons-en une base.

$$(x,y,z,t) \in G_a \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = ax+2z \\ z = 3t \\ t = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x \\ y = ax+6t \\ z = 3t \\ t = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que la famille de vecteurs de G_a, $\{(1,a,0,0), (0,6,3,1)\}$ est génératrice de G_a, comme de plus elle est libre, c'est une base de G_a.

II.2 Prenons un vecteur $V = (x,y,z,t)$ dans F, il existe donc deux réels μ et ν tels que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Comme on veut que ce vecteur soit aussi dans G_a, ses coordonnées doivent en plus verifier les conditions d'appartenance à G_a c'est-a-dire

$$\begin{cases} ax + 2z - y = a(-\nu) + 2(2\mu) - (\mu + 2\nu) = 0 \\ z - 3t = (2\mu) - 3(\nu) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3\mu - (a+2)\nu = 0 \\ 2\mu - 3\nu = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\mu - 3\nu = 0 & \leftarrow L_2 \\ (5-2a)\nu = 0 & \leftarrow 2L_1 - 3L_2 \end{cases}$$

Ce système admet donc des solutions autre que $(0,0)$ si et seulement si $a = 5/2$. Dans ce cas, pour que V soit aussi dans G_a il faut que $2\mu = 3\nu$, autrement dit V doit être de la forme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2\mu}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\mu}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ainsi on voit que le vecteur $(-2,7,6,2)$ engendre $F \cap G_{5/2}$, donc c'est bien une base de $F \cap G_{5/2}$. Conclusion :

$$\begin{cases} F \cap G_a = \{(0,0,0,0)\} & \text{si } a \neq 5/2 \\ F \cap G_{5/2} = \mathrm{Vect}\{(-2,7,6,2)\} \end{cases}$$

II.3 Pour que F et G_a soient supplémentaire dans $\mathbb{R}^4$ il faut et il suffit que

$$\begin{cases} \dim F + \dim G_a = \dim \mathbb{R}^4 = 4 \\ F \cap G_a = \{0\} \end{cases}$$

Comme par III.1 on a $\dim F = \dim G_a = 2$, la première condition est toujours vérifiée. Pour que la seconde soit vérifiée il faut par III.2 que $a \neq 5/2$. En conclusion F et G_a sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^4$ si et seulement si $a \neq 5/2$.

III

Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des applications indéfiniments dérivables de $\mathbb{R}$ dans lui-même.

III.1 On considère l'application d de E dans E qui associe à une fonction f sa fonction dérivée f'. Est-elle linéaire? injective (préciser $\ker d$)? surjective?

III.2 On considère l'application P de E dans E qui associe à une fonction sa primitive s'annulant en 0 : $P(f)(x) = \int_0^x f(t)dt$. Est-elle linéaire? injective? surjective?

III.3 Calculer $d \circ P$ et $P \circ d$.

Solution :

III.1 Linéarité : Soient f et g deux éléments de E, alors

$$d(f+g) = (f+g)' = f' + g' = d(f) + d(g)$$

et pour tout réel λ,

$$d(\lambda f) = (\lambda f)' = \lambda f' = \lambda d(f)$$

donc l'application d est linéaire.

Injectivité : Une application f est dans le noyau si sa dérivée f' est nulle. Ceci correspond au cas où f est une constante. Donc

$$\ker d = \{f \in E \mid \exists a \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x) = a, \forall x \in \mathbb{R}\} \neq \{0\}$$

donc d n'est pas injective.

Surjectivité : Soit $f \in E$ posons $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ alors F est C^∞ et $d(F) = f$, comme f a été choisit quelconque, on en déduit la surjectivité de d.

III.2 Linéarité : Soient f et g deux éléments de E, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$P(f+g)(x) = \int_0^x f(t) + g(t)dt = \int_0^x f(t)dt + \int_0^x g(t)dt = P\big(f\big)(x) + P\big(g\big)(x)$$

ceci étant vraie pour tout $x \in \mathbb{R}$ il vient $P(f+g) = P(f) + P(g)$. Soit à présent un réel λ, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$P\big(\lambda f\big)(x) = \int_0^x \lambda f(t)dt = \lambda \int_0^x f(t)dt = \lambda P\big(f\big)(x)$$

ce qui se traduit par $P(\lambda f) = \lambda P(f)$, et nous permet de conclure que P est une application linéaire.

Injectivité : $P(f) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, P(f)(x) = 0$ donc si $P(f) = 0$, $\big(P(f)\big)' = 0$ or $\big(P(f)\big)'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$ donc $f = 0$. Conclusion $\ker P \subset \{0\}$ donc $\ker P = \{0\}$ d'où l'injectivité de P

Surjectivité : Les fonctions de E ne s'annulant pas en 0 ne sont pas atteinte, donc P n'est pas surjective.

III.3

$$d \circ P\big(f\big)(x) = \big(P(f)\big)'(x)$$

or $\big(P(f)\big)' = f$ donc $d \circ P(f) = f$ et ceci pour tout $f \in E$. Ainsi $d \circ P = id_E$.

$$P \circ d\big(f\big)(x) = \int_0^x f'(t)dt = f(x) - f(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

en conclusion $\forall f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$

$$\Big(d \circ P - P \circ d\Big)\big(f\big)(x) = f(0).$$