Correction

DEUG MIAS 1999-2000, DM 1

Exercice 1 : Résoudre les système linéaires suivants :

$$(U_m)\left\{\begin{array}{rl} x-y+z= & 1\\ x+my+z= & m\\ mx-y+z= & 1\end{array}\right.$$

Solution : Utilisons z comme pivot

$$(U_m)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ll} x-y+z= & 1\\ (m+1)y= & m-1\\ (m-1)x= & 0\end{array}\right.$$

Commençons par les cas particuliers :

$\underline{m=1\,\mathbf{:}}$ le système devient

$$(U_1)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rl} x-y+z= & 1\\ 2y= & 0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rl} z= & 1-x\\ y= & 0\end{array}\right.$$

Nous sommes face à un système de deux équations à trois inconnues, qui admet une infinité de solution de la forme $(t,0,1-t)$ avec $t\in\mathbb{R}$.

$\underline{m=-1\,\mathbf{:}}$ le système devient

$$(U_{-1})\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rl} x-y+z= & 1\\ 0= & -1\\ -2x= & 0\end{array}\right.$$

Qui est de tout évidence impossible, donc dans ce cas pas de solution.

$\underline{m\neq-1\ \mathbf{et}\ m\neq 1\,\mathbf{:}}$ On peut dans ce cas divisé sans soucis par $m-1$ et $m+1$ pour obtenir

$$(U_m)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{rl} x-y+z= & 1\\ y= & \dfrac{m-1}{m+1}\\ x= & 0\end{array}\right.$$

c'est-à-dire qu'il y a une unique solution : $(0,\dfrac{m-1}{m+1},\dfrac{2m}{m+1})$.

Exercice 2 : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$, on considère les vecteurs

$$U_1\left|\begin{array}{c}1\\0\\1\\1\end{array}\right.\quad U_2\left|\begin{array}{c}0\\1\\0\\1\end{array}\right.\quad U_3\left|\begin{array}{c}1\\1\\0\\0\end{array}\right.\quad V_1\left|\begin{array}{c}2\\-1\\1\\-1\end{array}\right.\quad V_2\left|\begin{array}{c}3\\-3\\2\\-2\end{array}\right.\quad V_3\left|\begin{array}{c}2\\2\\1\\2\end{array}\right.\quad W\left|\begin{array}{c}a^2+a\\-a-1\\-a\\-2a-1\end{array}\right.,\ a\in\mathbb{R}.$$

Soient $E=\mathrm{Vect}(U_1,U_2,U_3)$, $F=\mathrm{Vect}(V_1,V_2,V_3)$, $G=\mathrm{Vect}(V_1,V_2,V_3,W)$.

* Montrer que les vecteurs V_i sont dans E et exprimer chacun de ces vecteurs en fonction des U_j. En déduire que les vecteurs U_j sont dans F. Qu'en déduit-on sur E et F ?

* Montrer l'inclusion $E\subset G$. Pour quelles valeurs de a a-t-on égalité ?

Solution : (rédaction succinct) Après résolution des systèmes on obtient

$$\left\{\begin{array}{lcl} V_1 & = & U_1 - 2U_2 + U_3 \\ V_2 & = & 2U_1 - 4U_2 + U_3 \\ V_3 & = & U_1 + U_2 + U_3 \end{array}\right.$$

Donc pour tout $i \in \{1,2,3\}, \quad V_i \in E$ or E est un espace vectoriel donc toutes les combinaisons linéaires des V_i sont dans E, autrement dit $F \subset E$.

Utilisons la méthode du pivot de Gauss sur le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} U_1 - 2U_2 + U_3 & = & V_1 \\ 2U_1 - 4U_2 + U_3 & = & V_2 \\ U_1 + U_2 + U_3 & = & V_3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} U_1 - 2U_2 + U_3 & = & V_1 & \\ -U_3 & = & V_2 - 2V_1 & \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ 3U_2 & = & V_3 - V_1 & \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} U_1 & = & 1/3(-5V_1 + 3V_2 + 2V_3) \\ U_2 & = & 1/3(-V_1 + V_3) \\ U_3 & = & 2V_1 - V_2 \end{array}\right.$$

On en déduit que pour tout $j \in \{1,2,3\}, \quad U_j \in F$ et pour les mêmes raisons que précédement $E \subset F$.

On a donc $\boxed{E \subset F \text{ et } F \subset E \text{ donc } E = F.}$

Maintenant comme les $V_i \in G, \quad i \in \{1,2,3\}$ on a, toujours pour les mêmes raisons, $F \subset G$ et comme $E = F$, $E \subset G$.

Pour qu'il y ait égalité il faut que $W \in E$, on cherche à quelles conditions (sur a) il existe $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}^3$ tels que $W = \alpha U_1 + \beta U_2 + \gamma U_3$ ce qui revient à résoudre le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha + \gamma & = & a^2 + a \\ \beta + \gamma & = & -a - 1 \\ \alpha & = & -a \\ \alpha + \beta & = & -2a - 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcll} \alpha & = & -a & \leftarrow L_3 \\ \beta & = & -a - 1 & \leftarrow L_4 - L_3 \\ \gamma & = & a^2 + 2a & \leftarrow L_1 - L_3 \\ \beta + \gamma & = & -a - 1 & \leftarrow L_2 \end{array}\right.$$

ce système admet une solution si et seulement si $a^2 + 2a = 0$, donc si $a = 0$ ou si $a = -2$. En conclusion $\boxed{G = E \text{ si et seulement si } a = 0 \text{ ou } a = -2.}$