Algèbre linéaire

DEUG MIAS 1999-2000, Groupe A2

Exercice 1 : On se place dans $\mathbb{R}^3$. Dans ce qui suit déterminer si le vecteur $\overrightarrow{w}$ est dans l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

1.a $\overrightarrow{u} = (1,3,0)$, $\overrightarrow{v} = (-1,1,0)$ et $\overrightarrow{w} = (1,1,0)$

1.b $\overrightarrow{u} = (-1,0,2)$, $\overrightarrow{v} = (2,1,-1)$ et $\overrightarrow{w} = (1,0,1)$

1.c $\overrightarrow{u} = (1,1,2)$, $\overrightarrow{v} = (-1,1,-1)$ et $\overrightarrow{w} = (-1,5,1)$

1.d $\overrightarrow{u} = (1,2,1)$, $\overrightarrow{v} = (4,-2,3)$ et $\overrightarrow{w} = (2,2,8)$

1.e $\overrightarrow{u} = (5,1,3/2)$, $\overrightarrow{v} = (2,14,1)$ et $\overrightarrow{w} = (5,18,2)$

Exercice 2 : On se place dans $\mathbb{R}^4$, déterminer si les vecteurs donnés engendrent tout l'espace.

2.a $\overrightarrow{v_1} = (1,0,0,0)$, $\overrightarrow{v_2} = (1,1,1,1)$ et$\overrightarrow{v_3} = (1,-1,1,-1)$.

2.b $\overrightarrow{v_1} = (1,0,0,0)$, $\overrightarrow{v_2} = (1,1,1,1)$, $\overrightarrow{v_3} = (1,-1,1,-1)$ et $\overrightarrow{v_4} = (0,0,1,0)$.

2.c $\overrightarrow{v_1} = (1,2,0,3)$, $\overrightarrow{v_2} = (1,-1,1,0)$, $\overrightarrow{v_3} = (1,2,3,4)$ et $\overrightarrow{v_4} = (3,3,4,7)$.

2.d $\overrightarrow{v_1} = (1,-2,0,3)$, $\overrightarrow{v_2} = (3,-6,1,0)$, $\overrightarrow{v_3} = (-2,4,3,4)$ et $\overrightarrow{v_4} = (5,-10,4,7)$.

Exercice 3 : Déterminer si le sous espaces E est un sous espaces-vectoriels de V

3.a V est l'ensemble des fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ et E est le sous ensemble des fonctions qui s'annulent en 0 et en 1.

3.b $V = \mathbb{R}^3$ et $E = \{(x,y,z) \mid xyz = 1\}$.

3.c $V = \mathbb{C}$ et $E = \{z \in \mathbb{C} \mid z + 4\overline{z} = 0\}$

3.d $V = \mathbb{C}$ et $E = \{z \in \mathbb{C} \mid 2z - 3\overline{z} = 1\}$

3.e $V = \mathbb{C}$ et $E = \{z \in \mathbb{C} \mid 2z - 3z^2 = 0\}$

Exercice 4 : Dans tout ce qui suit G est un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$.

4.a Soient E, F deux sous espaces vectoriels de G, montrer que $E \cup F = G$ si et seulement si $E = G$ ou $F = G$.

4.b Soit $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille dénombrable de sous espaces vectoriels de G montrer que $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n = G$ si et seulement si il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $E_{n_0} = G$.

4.c Soit $(E_i)_{i\in I}$ une famille quelconque de sous espaces vectoriels de G montrer que $\bigcup\limits_{i\in I} E_i = G$ si et seulement si il existe $i_0 \in I$ tel que $E_{i_0} = G$.