# Algèbre et arithmétique

DEUG MIAS 1999-2000, Groupe A2

**Exercice 1** : La famille de fonction $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $P_n(x) = x^n$ est-elle libre dans l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$?

**Exercice 2** : Montrer que si les familles de vecteurs de $\mathbb{R}^k$, $(u_1,u_2,\ldots,u_n,u)$ et $(u_1,u_2,\ldots,u_n,v)$ sont liées, $(u_1,u_2,\ldots,u_n,u+v)$ est liée.

**Exercice 3** : Soit $(u_1,u_2,\ldots,u_n)$ une famille libre d'un espace vectoriel $E$. La famille $(u_1 + u_2,u_2+u_3,\ldots,u_n+u_1)$ est-elle libre?

**Exercice 4** : Soient pour $a \in \mathbb{R}$, $f_a : x \mapsto \sin(x+a)$ et $g_a : x \mapsto |x-a|$.

**4.a** Montrer que $(f_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est liée (et de rang 2).

**4.b** Montrer que $(g_a)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre.

**Exercice 5** : On considère $\mathbb{R}$ comme un $\mathbb{Q}$-ev. Soit $\mathcal{F} = (\ln p)_{p\in\mathbb{N}}$.

**5.a** Montrer que $\mathcal{F}$ est libre.

**5.b** Montrer que $\mathcal{F}$ n'est pas une base de $\mathbb{R}$ (on pourra montrer que si $x \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $e^{nx} \in \mathbb{Q}$).

**Exercice 6** : Montrer que le produit de 3 entiers consécutifs n'est jamais un carré d'entier.

**Exercice 7** : Soit $f$ une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ strictement croissante, vérifiant :

* $f(1) = 1$ et $f(2) = 2$
* Si $n$ et $m$ sont deux entiers premier entre eux alors $f(mn) = f(m)f(n)$

**7.a** On admet que $f(3) = 3$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $f(2^n+1) = 2^n+1$.

**7.b** En déduire que $f(n) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**7.c** En majorant et en minorant $f(18)$ montrer que $f(3) = 3$.