Droites et plans dans l'espace

DEUG MIAS 2000-2001. TD OMS 3

Exercice 1 : On considère quatre points A, B, C et D de l'espace. Déterminer a valeur de l'expression $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$. En déduire que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Exercice 2 : Soit P_1, P_2, P_3 et P_0 quatre points de l'espace.

2.a Trouver l'équation du plan qui passe par P_1,,P_2 et P_3. Quel est le vecteur normal $\overrightarrow{n}$ de ce plan ?

2.b Calculer la distance de P_0 au plan de normale $\overrightarrow{n}$ passant par P_1.

2.c Calculer la distance ci-dessus pour

$$P_1(3,1,-2), \qquad P_2(-1,2,4), \qquad P_3(2,-1,1), \qquad P_0(1,3,-1).$$

Exercice 3 : Trouver l'équation de la droite D qui passe par des points $P_1(3,1,-2)$ et $P_2(-1,2,4)$.

3.a Determiner un vecteur-directeur $\overrightarrow{v}$ de cette droite.

3.b Calculer la distance de $P_0(1,3,-1)$ à la droite D.

3.c Déterminer les coordonnées (x,y,z) de la projection orthogonale H de P_0 sur la droite D.

3.d Trouver les coordonnées du point P' symétrique de P_0 par rapport a D

Exercice 4 : Soient $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les plans d'équation

$$\begin{cases} \mathcal{P}_1 : & 2x + 3y + z - 4 = 0; \\ \mathcal{P}_2 : & 3x - y - 3z - 2 = 0. \end{cases}$$

Montrer que ces deux plans sont perpendiculaires. Calculer la distance de l'origine O du repère au plan $\mathcal{P}_1$, au plan $\mathcal{P}_\in$, à la droite $\mathcal{D} = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.

Exercice 5 : On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + 2y - z - 6 = 0$ et le point $A(1,2,3)$.

5.a Déterminer les coordonnées de la projection orthogonale de A sur le plan $\mathcal{P}$.

5.b Déterminer l'équation du plan passant par A et parallèle à $\mathcal{P}$.

5.c On considère le tétraèdre $\mathcal{T}$ dont les face sont le plan $\mathcal{P}$ et les plans de coordonnées. Déterminer les coordonnées des sommets de $\mathcal{T}$.

Exercice 6 : Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ les deux plans définies par les équations $2x - y - z + 1 = 0$ et $x + y - 2z + 2 = 0$ respectivement.

6.a Donner un vecteur $\overrightarrow{v}$ directeur de la droite D, intersection de ces plans. Trouver l'équation de D.

6.b On considère la sphère S d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z + 2 = 0$. Le plan $\mathcal{P}_1$, coupe-t-il la sphère S ? Et la droite D ?