Fonctions vectorielles et dérivées partielles

DEUG MIAS 2000-2001. TD OMS 5

Exercice 1 : Donner l'équation qui décrit la position d'une particule qui évolue avec une accélération $\overrightarrow{g} = 9.8(m/sec^2) \cdot \overrightarrow{k}$, les conditions initiales étant

$$\overrightarrow{r}(0) = 7\overrightarrow{i} + 4.9\overrightarrow{k}\ (m), \quad \overrightarrow{v}(0) = 7\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}\ (m/sec).$$

Exercice 2 : Une particule évolue de sorte que sa position à chaque instant t est donnée par le vecteur

$$\overrightarrow{r} = t\,\overrightarrow{i} + (t + t^2/2)\overrightarrow{j} + (4/\pi^2)\sin(\pi t/2)\overrightarrow{k}.$$

Calculer la position, la vitesse et l'accélération de la particule à l'instant $t = 0$ ($t = 1$). Quelle est l'équation de la droite tangente à la trajectoire à l'instant t ? Du plan orthogonal ?

Exercice 3 :

3.a Si $f(x,y) = 3x^2 + 4xy - 2y^2$, trouver $\frac{\partial f}{\partial x}(2,-3)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(2,-3)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,-3)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2,-3)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,-3)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,-3)$.

3.b Si $f(x,y) = \sin(x^2 + 2y)$, déterminer $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

3.c Si $z = f(y/x)$, montrer que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Exercice 4 : Déterminer les dimensions du parallélépipède rectangulaire de plus grand volume qui peut être inscrit dans une hémisphère de rayon a.

Exercice 5 : Trouver les équations du plan tangent et de la droite normale à la surface $x^2 + y^2 = 4z$ en $(2,-4,5)$

Exercice 6 : Soient $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$

6.a Calculer les différentielles dx et dy.

6.b Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Donner des relations entre les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial r}$ et $\frac{\partial f}{\partial \theta}$. Quelle est l'expression du vecteur gradient $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f$ en coordonnées r et θ ?

6.c Déterminer le gradient de fonctions $f(r,\theta) = \frac{1}{r}$, $f(r,\theta) = re^{\theta}$.