Dérivées partielles et Différentielles

DEUG MIAS 2000-2001 TD OMS 6

1 Coniques et centres

Dans le cas générale l'équation cartesienne d'une conique est de la forme

$$C(x,y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Le type de la conique correspondante nous sera donné par $\Delta = b^2 - 4ac$

1. Si $\Delta < 0$ c'est une Ellipse ;
2. Si $\Delta = 0$ c'est une Parabole ;
3. et si $\Delta > 0$ c'est une Hyperbole.

Dans le premier et troisième cas il s'agit de conique à centre. Dans ce cas les coordonnées (x_0,y_0)du centre nous serons données par le système : $\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}C(x,y) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y}C(x,y) = 0 \end{cases}$ du coup l'équation pourra alors se réécrire $C(x,y) = a(x-x_0)^2 + b(x-x_0)(y-y_0) + c(y-y_0)^2 + g = 0$

Exercice 1 :

1.a Calculer $\frac{\partial}{\partial x}C(x,y)$, $\frac{\partial}{\partial y}C(x,y)$ et montrer que le système admet bien une solution.

1.b Quelle est la nature et le centre eventuel des coniques suivantes:

* $x^2 + 4xy + y^2 + 2x + 1 = 0$;
* $x^2 - 2xy - 3y^2 + 3x + 2y - 5 = 0$.

2 Dérivées partielles de fonctions vectorielles

Soit $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j}$ vecteur de position dans $\mathbb{R}^2$. Alors sa différentielle (le déplacement infinitésimal) $d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{i}\,dx + \overrightarrow{j}\,dy$ et $|d\overrightarrow{OM}| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$. Si le même vecteur est donné en coordonnées polaires $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r}$, nous pouvons déterminer sa différentielle de la façon suivante: on remarque d'abord que

$$d\overrightarrow{OM} = d(r\,\overrightarrow{u_r}) = \overrightarrow{u_r}\,dr + r\,d(\overrightarrow{u_r}),$$

où $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ sont les vecteurs unitaires du repère orthonormé mobile en coordonnées polaires. Rappelons que

$$\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{i}\cos\theta + \overrightarrow{j}\sin\theta, \quad \overrightarrow{u_\theta} = -\overrightarrow{i}\sin\theta + \overrightarrow{j}\cos\theta.$$

Comme

$$\frac{\partial\overrightarrow{u_r}}{\partial r} = 0, \text{ et } \frac{\partial\overrightarrow{u_r}}{\partial\theta} = -\overrightarrow{i}\sin\theta + \overrightarrow{j}\cos\theta = \overrightarrow{u_\theta},$$

nous obtenons $d\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u_r}\,dr + \overrightarrow{u_\theta}\,r\,d\theta$ et $|d\overrightarrow{OM}|^2 = (dr)^2 + r^2(d\theta)^2$.

Exercice 2 : En coordonnées cylindriques les trois vecteurs unitaires orthonormés $\overrightarrow{u_\rho}$, $\overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{k}$ sont donnés par les équations

$$\overrightarrow{u_\rho} = \overrightarrow{i}\cos\theta + \overrightarrow{j}\sin\theta, \quad \overrightarrow{u_\theta} = -\overrightarrow{i}\sin\theta + \overrightarrow{j}\cos\theta$$

pour les vecteurs mobiles $\overrightarrow{u_\rho}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$, et le vecteur fixe $\overrightarrow{k}$.

* Obtenir l'expression du déplacement infinitésimal $d\overrightarrow{OM}$ et de la distance élémentaire $|d\overrightarrow{OM}|$ (rappelons que $\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u_\rho} + z\,\overrightarrow{k}$).

Exercice 3 : En coordonnées sphériques les vecteurs unitaires orthonormés mobiles $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{u_\phi}$ sont donnés par les équations

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u_r} &= \overrightarrow{i}\sin\theta\cos\phi + \overrightarrow{j}\sin\theta\sin\phi + \overrightarrow{k}\cos\theta \\
\overrightarrow{u_\phi} &= -\overrightarrow{i}\sin\phi + \overrightarrow{j}\cos\phi, \\
\overrightarrow{u_\theta} &= \overrightarrow{i}\cos\theta\cos\phi + \overrightarrow{j}\cos\theta\sin\phi - \overrightarrow{k}\sin\theta.
\end{aligned}$$

Vérifier que pour $d\overrightarrow{OM} = d(r\overrightarrow{u_r})$ on a bien les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
d\overrightarrow{OM} &= dr\overrightarrow{u_r} + rd\theta\overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta d\phi\overrightarrow{u_\phi}, \\
|d\overrightarrow{OM}| &= (dr)^2 + r^2(d\theta)^2 + r^2\sin^2\theta(d\phi)^2.
\end{aligned}$$

3 Intégrale curviligne

Exercice 4 : Calculer les longueurs des courbes

4.a $x = 3t,\ y = 3t^2,\ z = 2t^3$, entre $O(0,0,0)$ et $A(3,3,2)$;

4.b $x = \mathrm{e}^{-t}\cos t,\ x = \mathrm{e}^{-t}\sin t$, et $z = \mathrm{e}^{-t}$, entre $t = 0$ et $t = 1$.

4.c $x^2 + y^2 = z,\ \dfrac{y}{x} = \tan z$, entre $O(0,0,0)$ et $A(\sqrt{\frac{\pi}{8}},\sqrt{\frac{\pi}{24}},\pi/6)$.

Exercice 5 : Un point mobile évolue selon l'équation $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt$ entre $t = 0$ et $t = 2\pi$. Calculer le travail de la force $\overrightarrow{F}(x,y,z) = x\,\overrightarrow{i} + y\,\overrightarrow{j} + z\,\overrightarrow{k}$.

Exercice 6 : Un point mobile décrit la courbe définie par

$$x = \mathrm{e}^t\cos t, \quad y = \mathrm{e}^t\sin t \ \text{ et } \ z = \mathrm{e}^t$$

où t est le temps.

6.a Quelle est la distance parcourue entre $t = 0$ et $t = 1$? Pour quelle valeur de t la distance parcourue est-elle de $4\sqrt{3}$, en unité de longueur ?

6.b Calculer le travail de la force $\overrightarrow{F} = z\,\overrightarrow{k}$ entre $t = 0$ et $t = 1$.

Exercice 7 : Déterminer le travail de la force de gravitation $\overrightarrow{F} = \dfrac{k\overrightarrow{u_r}}{r^2}$, où $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, entre les points $M_1(x_1,y_1,z_1)$ et $M_2(x_2,y_2,z_2)$.

Exercice 8 : Déterminer le travail de la force $\overrightarrow{F} = -kr\overrightarrow{u_r}$ sur l'arc d'ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

entre $M_1(a,0)$ et $M_2(0,b)$.