

Fonctions usuelles

Exercice 1 : Calculer la dérivée des fonctions suivantes

1.a $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$.

1.b $x \mapsto \ln(|\sin x|)$.

1.c $x \mapsto a^x$ avec $a \in \mathbb{R}^+$.

Exercice 2 : Calculer les intégrales

2.a $\int_0^\pi \sin 2x \, dx$.

2.b $\int_0^1 \frac{2x+1}{x^2+x+1} \, dx$.

Exercice 3 : Donner une primitive de $\cos x \sin^2 x$.

Exercice 4 : Les suites suivantes sont-elles bornées, croissantes, décroissantes, périodiques, monotones?

* $u_n = 4n^2 + n$

* $u_n = \ln(1 - 4n)$

* $u_n = \sin(\pi n)$

Exercice 5 : Soit la suite définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = U_n + (1/2)^n$. Montrer que (U_n) est une suite croissante, majorée par 3. Conclure quant à sa convergence.

Exercice 6 : Soient f et g les fonctions suivantes définies sur \mathbb{R} :

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = x + 1$$

6.a Calculer la fonction produit fg définie par:

$$(fg)(x) = f(x) \times g(x), \forall x \in \mathbb{R}$$

6.b Même question pour la fonction composition définie par:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

6.c Qu'en déduit-on?

Exercice 7 : Etude de variation et représentation graphique d'une fonction. Soit f la fonction réelle définie comme suit:

$$f(x) = -2 \frac{x^2 + 5x + 4}{(x^2 - 4)^2}$$

7.a Quel est l'ensemble de définition, noté I_f de la fonction f ?

7.b Dresser le tableau de signe de la fonction f . Soit maintenant g la fonction réelle suivante:

$$g(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 4}$$

7.c Quel est l'ensemble de définition de g .

7.d Quel est l'ensemble de dérivabilité I_g de g . Calculer la fonction dérivée de g .

7.e Calculer les limites suivantes:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow -4} g(x), \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} g(x), \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x), \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} g(x), \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} g(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$$

7.f Dessiner, de façon qualitative, le graphe de la fonction g ainsi que ses asymptotes.

7.g Quel est le signe du réel suivant:

$$\int_{-5}^{-3} g(x) dx + \int_{-\frac{3}{2}}^{-\frac{1}{2}} g(x) dx.$$

Une argumentation de type graphique sera la bienvenue.

7.h La fonction g est-elle injective, surjective, bijective sur les ensembles $] - \infty; -2[$, $] - 2; 2[$, $] 2; +\infty[$?

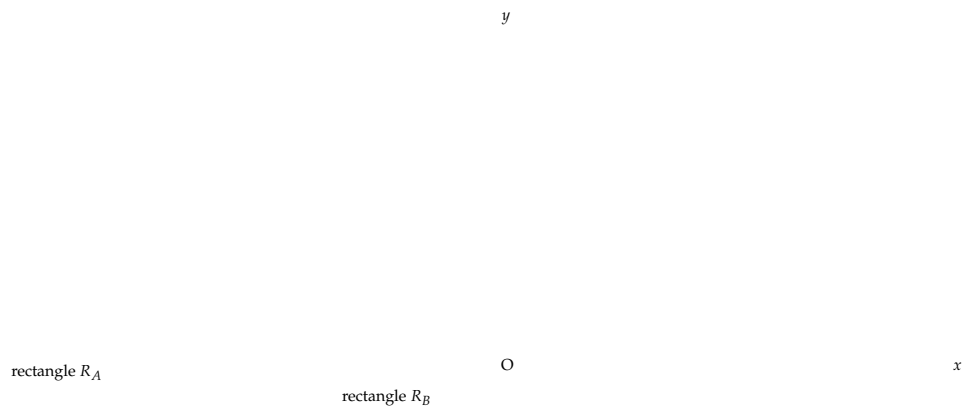


FIG. 1 – *Graphe de g*