$\boxed{\textbf{Suites récurrentes}}$

DEUG SV 2000-2001. TD math. Semaine 2

Exercice 1 : On considère la fonction suivante :

$$\begin{array}{rcl} f \ : \ [0,1] & \to & [0,1] \\ x & \mapsto & \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2, \\ 2-2x & \text{si } 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases} \end{array}$$

1.a Tracer le graphe de f et celui de $f \circ f$. Trouver les points fixes de la fonction f et étudier le comportement des suites vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$ pour u_0 proche d'un de ces points fixes (i.e. étudier la stabilité de ces points fixes). Trouver les valeurs u_0 donnant des suites périodiques de période 2.

1.b Montrer que la composée de deux fonctions affines est encore une fonction affine, et déduisez-en le graphe de $f^{(n)}$ (où on note $f^{(n)} = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n fois}$).

Exercice 2 : Etudier la suite récurrente définie par : $u_{n+1} = \sqrt{4 + 3u_n}$ à l'aide d'une étude rapide de la fonction associée. En particulier, il est conseillé de tracer le graphe de cette fonction, ainsi que la droite d'équation $y = x$.

On étudiera séparément les deux cas suivants : $u_0 \leq 4$ et $u_0 \geq 4$.

Exercice 3 : Pour tout réel γ, on considère la fonction $f_\gamma : x \mapsto \gamma x(1-x)$.

3.a Trouvez les valeurs de γ pour lesquelles l'application f_γ envoie $I = [0,1]$ sur lui-même.

3.b On choisit une valeur de γ satisfaisant la condition précédente. Trouver alors les points fixes de f_γ et étudier leur stabilité. trouvez les trajectoires de période 2 (étudier leur stabilité).

Exercice 4 : **méthode de Newton.**

On cherche à résoudre une équation de la forme $f(x) = 0$, où f est une fonction de classe C^2 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour cela on part d'une valeur arbitraire x_0 et on prend pour x_1 la valeur de l'abscisse du point d'intersection de l'axe $(y = 0)$ avec la tangente à f en x_0. En itérant le procedé on obtient une suite (x_n) (faire un dessin !).

4.a Donner une condition nécessaire pour que le procédé précédent soit applicable à une fonction f. Montrer qu'alors il existe une fonction g telle que la suite précédemment définie vérifie $u_{n+1} = g(u_n)$.

4.b Montrer que les points fixes de la fonction g sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$, et que ces points fixes sont stables. Qu'en déduisez vous pour cette méthode?

Exercice 5 : Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{5 + \sqrt{13 + x}}$$

on considère la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par:

$$u_1 = \sqrt{5}, \qquad u_2 = \sqrt{5 + \sqrt{13}}, \qquad u_{n+2} = f(u_n).$$

5.a Montrer que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

5.b Etudier la fonction f.

5.c Placer u_{2p} par rapport à 3.

5.d Etudier la sous-suite $(u_{2p})_{p\geq 1}$. Conclure quant à la convergence de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

Exercice 6 : Soit l'équation définie par : $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n, \ \forall\, n \geq 1$, les deux premiers termes de la suite étant donnés. On cherche à trouver les suites qui vérifient cette équation du second ordre.

6.a Quelles sont les solutions de type $u_n = r^n$ où r est un réel à déterminer.

6.b En déduire l'ensemble des solutions de l'équation, sachant qu'il s'agit d'un espace vectoriel réel de dimension 2.