Matrices 2×2

DEUG SV 2000-2001. TD math. Semaine 2(bis)

Exercice 1 : Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

1.a vérifier que $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2 = 0$

Remarque. pour une matrice de la forme de A ci-dessus, on appelle trace de A la somme $\text{trace}(A) = a + d$ des termes de la diagonale et déterminant de A : $\text{dét}(A) = ad - bc$

1.b Soit $D = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Calculer AD et donner sa trace. Faire de même avec DA. Que peut-on en déduire ?

1.c Déterminer la matrice B tel que $AB = I_2$ en supposant que $\text{dét}(A)$ est non nul. De même déterminer la matrice C telle que $CA = I_2$. Qu'en déduisez-vous ? Que se passe-t-il si $\text{dét}(A) = 0$?

Exercice 2 : Pour les matrices suivantes calculer A^n :

2.a $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

2.b $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Exercice 3 : On désir étudier l'évolution moyenne d'une population d'animaux au cours des ans. Chaque année est supposée se diviser en deux saisons homogènes : la *saison hivernale*, puis la *saison de reproduction*.

À la fin d'une année, la population comprends des *jeunes* et des *adultes* en nombres respectifs J et A. Une proportion p des J jeunes survit à la saison hivernale : ces pJ jeunes deviennent des adultes ; il n'y alors plus de jeunes. Une proportion q des adultes survit.

La saison de reproduction a lieu alors : chacun des adultes donne naissance à un nombre de jeunes égal à a. Tous les adultes survivent.

Le cycle annuel se déroule donc selon le schéma ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & \multicolumn{3}{c}{\text{Année } n} & & \multicolumn{3}{c}{\text{Année } n+1} & \\
 & \text{hivernal} & & \text{de reproduction} & & \text{hivernal} & & \text{de reproduction} & \\
J_{n-1} & \longrightarrow & J'_n & \longrightarrow & J_n & \longrightarrow & J'_{n+1} & \longrightarrow & J_{n+1} \\
A_{n-1} & \longrightarrow & A'_n & \longrightarrow & A_n & \longrightarrow & A'_{n+1} & \longrightarrow & A_{n+1}
\end{array}$$

Les effectifs sont observés *en fin* de saison.

3.a Mettre sous la forme

$$\begin{pmatrix} J'_n \\ A'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v \\ w & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_{n-1} \\ A_{n-1} \end{pmatrix}$$

les équations donnant le nombre de jeunes et d'adultes en fin de saison hivernale, en fonction de ce qu'ils étaient à la fin de la saison de reproduction précédente.

3.b Mettre sous la forme

$$\begin{pmatrix} J_n \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f & g \\ k & l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J'_n \\ A'_n \end{pmatrix}$$

les équations donnant le nombre de jeunes et d'adultes en fin de saison de reproduction, en fonction de ce qu'ils étaient à la fin de la saison hivernale précédente.

3.c En déduire l'équation matricielle d'évolution annuelle :

$$\begin{pmatrix} J_n \\ A_n \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} J_{n-1} \\ A_{n-1} \end{pmatrix}$$

3.d Comment obtient-on les effectifs après un, deux, trois, ... , n années à partir d'une valeur initiale

$$\begin{pmatrix} J_0 \\ A_0 \end{pmatrix}$$

3.e Déduire de la troisième question une relation entre J_n et A_n ($n \geq 1$), puis une relation de récurrence entre J_n et J_{n-1} d'une part, puis A_n et A_{n-1} d'autre part.

3.f Montrer que l'effectif total $J_n + A_n$ augmente selon une progression géométrique dont on déterminera la raison.

3.g **Application numerique :** À partir de

$$\begin{pmatrix} J_0 \\ A_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad a = 3, \qquad p = 0.4, \qquad q = 0.8$$

calculer $\begin{pmatrix} J_1 \\ A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_2 \\ A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_3 \\ A_3 \end{pmatrix}$ Quelle est la proportion de jeunes dans la population à partir de la première année ? Calculer l'effectif total au bout de 10 ans.