Matrices 2×2 II : valeurs et vecteurs propres

DEUG SV 2000-2001. TD math. Semaine 3

Exercice 1 : Calculer

1.a le produit des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ \pi & \ln(2) \end{pmatrix}$$

1.b Le déterminant et la trace des trois précédentes matrices. Ainsi que le déterminant du produit et le produit des déterminants. Que remarquez-vous ?

1.c L'inverse de ces mêmes matrices.

Exercice 2 :

2.a Pour les matrices suivantes déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 3/2 & 0 \end{pmatrix}$$

2.b En déduire la forme de la matrice représentant les applications correspondantes, dans une base de vecteurs propres. Donner les matrices de passages.

2.c En déduire les solutions des systèmes

$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + 4v_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} 2u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ 2v_{n+1} = 3u_n \end{cases}$$

Exercice 3 : Même exercice avec les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et en étudiant les systèmes

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = -2u_n + 3v_n \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n \\ v_{n+1} = u_n + v_n \end{cases}$$