Vecteurs du plan et de l'espace

DEUG ST MIAS 2001-2002. Groupe C3. TD OMS 2

Exercice 1 : Soient les vecteurs

$$\overrightarrow{a} = 3\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j} - \overrightarrow{k}, \qquad \overrightarrow{b} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j} + \overrightarrow{k}, \qquad \overrightarrow{c} = \overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$$

calculer

$$\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \quad \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}, \quad \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{i}, \quad \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}, \quad (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}) \cdot \overrightarrow{b} - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}$$

Exercice 2 : On considère les vecteurs $\overrightarrow{V_1}(1, -2{,}5)$, $\overrightarrow{V_2}(2, -\frac{3}{2}, a)$. Déterminer le réel a pour que $\overrightarrow{V_1}$ soit orthogonal à $\overrightarrow{V_2}$.

Exercice 3 : On considère les trois points $O(0,0,0)$, $A(\frac{3-\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{3+\sqrt{3}}{2})$ et $B(2,2,2)$. Calculer : $\overrightarrow{0A} \cdot \overrightarrow{OB}$, $\|\overrightarrow{0A}\|$, $\|\overrightarrow{OB}\|$ et $\overrightarrow{A0} \cdot \overrightarrow{AB}$. Quelle est la nature du triangle OAB ?

Exercice 4 :

4.a Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on considère les points $A(1,2)$ et $B(4,1)$. Quelle est l'aire du triangle OAB ?

4.b Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct, on considère les points $A(1,2,3)$, $B(4,1,2)$ et $C(2,5,1)$. Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et l'aire du triangle ABC.

Exercice 5 : On considère quatre points A, B, C et D de l'espace.

5.a Calculer

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}, \qquad \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{DA} \wedge \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{DA}$$

5.b Déterminer la valeur de l'expression $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC}$. En déduire que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Exercice 6 : Calculer

$$\overrightarrow{U} \wedge (\overrightarrow{V} \wedge \overrightarrow{W}) + \overrightarrow{V} \wedge (\overrightarrow{W} \wedge \overrightarrow{U}) + \overrightarrow{W} \wedge (\overrightarrow{U} \wedge \overrightarrow{V}).$$

(On admettra la formule du double produit vectoriel:

$$\overrightarrow{a} \wedge (\overrightarrow{b} \wedge \overrightarrow{c}) = (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})\overrightarrow{b} - (\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b})\overrightarrow{c}$$