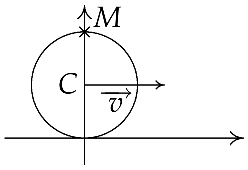
Fonctions vectorielles

DEUG ST MIAS 2001-2002. Groupe C3. TD OMS 3

Exercice 1 : On considère une roue de rayon R dans la situation ci-dessous, qui roule sans glisser sur le sol.

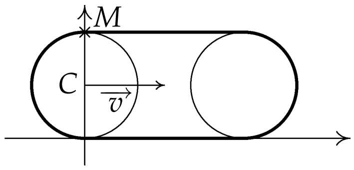


1.a On suppose que la vitesse du centre C de la roue est constante et égale à $\overrightarrow{v} = (3{,}0)$ (l'unité est le cm par seconde). Déterminer le mouvement du point M en fonction du temps t.

1.b Représenter la trajectoire du point M.

1.c Que se passe-t-il lorsque le point M touche le sol ?

1.d Mêmes questions, mais on suppose que M est sur une chaîne autour de deux roues dentées (comme pour un char).



Exercice 2 : On suppose qu'une voiture descend une pente de $15°$ avec une vitesse verticale constante de $70\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$, quelle est sa vitesse au compteur ?

Exercice 3 : À l'instant t, la position d'un point M est définie par

$$x = 1 - \cos t, \qquad y = 1 - \sin^2 t.$$

3.a En éliminant t entre x et y, en déduire une équation cartésienne de la trajectoire.

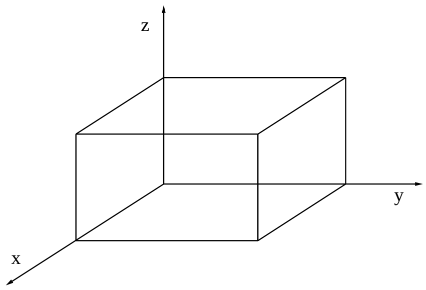
3.b Placer le point M pour les instants

$$t = 0, \qquad t = \frac{\pi}{2}, \qquad t = \pi, \qquad t = \frac{3\pi}{2}, \qquad t = 2\pi.$$

3.c En quels points le vecteur $\overrightarrow{OM}$ est-il orthogonal au vecteur vitesse ? En quels points sont-ils colinéaires ?

Exercice 4 : Un point P se déplace sur un axe. À l'instant t sa position est définie par $x = Re^{-t} \sin t$, avec $R > 0$. Tracer le graphe de la fonction $x(t)$. Quels sont les instants pour lesquels la vitesse est nulle ?

Exercice 5 : Une mouche ivre M se promène dans une boîte parallélépipédique à plafond transparent, posée horizontalement avec un coin en l'origine O de l'espace $\mathbb{R}^3$, et orientée comme sur le dessin:



À partir du temps $t = 0$, sa trajectoire est donnée par

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{3t}{1+t} \\ z(t) = 1 + \cos t. \end{cases}$$

5.a Quel est le point de départ de la mouche ? Vers où va-t-elle lorsque $t \to \infty$? (faites un dessin)

5.b Vérifiez que la mouche reste effectivement dans une boîte. On suppose que la boîte est la plus petite possible pour contenir la trajectoire de la mouche. Calculez son volume.

5.c Quand la mouche touche-t-elle le plafond ? Esquissez l'allure des impacts de la mouche sur le plafond.

5.d Il est midi: le soleil est exactement à la verticale. Donnez les équations du mouvement de l'ombre $\mathcal{M}$ de la mouche. Vers où va cette ombre lorsque $t \to \infty$?

5.e Donnez la vitesse de l'ombre de la mouche: $\overrightarrow{v}_{\mathcal{M}} = \ldots$ Y a-t-il des moments où cette ombre pointe vers le point $\Omega_0 = (0{,}3{,}0)$? Vers le point $\Omega_1 = (1{,}3{,}0)$?