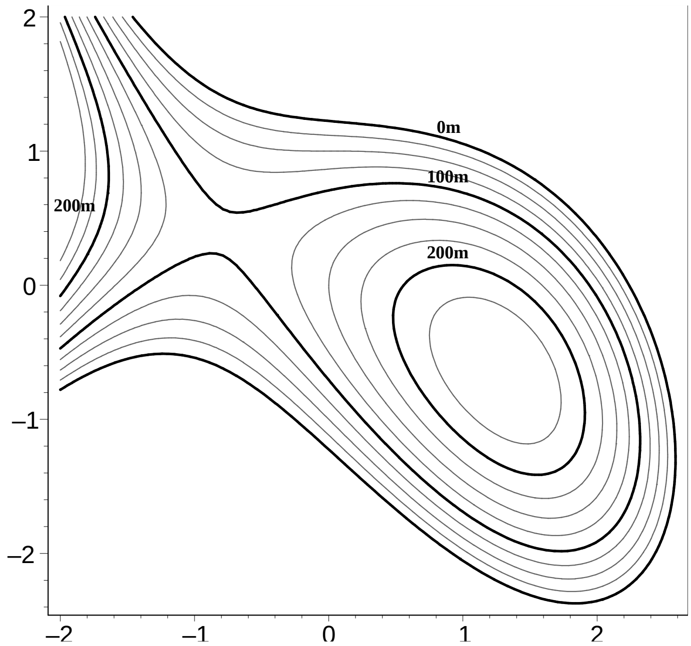
Dérivées partielles

DEUG ST MIAS 2001-2002. Groupe C3. TD OMS 7

Exercice 1 : La figure ci-dessous est une carte du relief d'une presqu'île: le contour extérieur est la ligne de niveau 0 (bord de mer). L'équidistance des lignes de niveau est de 25 mètres.



-A- Partie expérimentale

A.1 Un skieur de fond perdu dans le brouillard s'arrête, les skis bien horizontaux pour ne pas glisser, et cherche à se repérer à l'aide de son altimètre et de sa boussole. Il voit qu'il se trouve à 100 mètres d'altitude, avec ses skis orientés droit vers l'est. La pente est descendante vers sa gauche. Quelles est sa position sur la carte ?[1]

A.2 Le skieur décide de continuer son chemin à la boussole, droit vers l'est, jusqu'à atteindre la mer. Dessinez le profil du relief le long de l'itinéraire qui l'attend, en évaluant les dénivelés successifs.

A.3 Regardant mieux son altimètre avant de se mettre en route, le skieur s'aperçoit avec effroi que celui-ci est cassé, de sorte qu'il ne peut connaître son altitude et que ce qu'il avait déduit en A.1 est erroné. Tracez sur la carte l'ensemble de ses positions possibles.

Un plaisancier mouillant dans la baie située au sud de la presqu'île voudrait franchir la presqu'île à skis pour rejoindre la côte nord, en se dirigeant toujours droit vers le nord.

A.4 Dessinez le profil du relief le long de divers itinéraires sud-nord, en évaluant pour chacun de ces itinéraires l'altitude du point culminant. En quel point de la baie le plaisancier doit-il aborder pour que son dénivelé soit le plus petit possible ? Marquez sur la carte le point culminant de son itinéraire, et évaluez-en l'altitude.

A.5 La presqu'île est soumise à un fort vent du nord. Coloriez sur la carte la zone de la presqu'île abritée du vent, en essayant de délimiter avec précision le bord de cette zone.

1. Deux positions possibles

A.6 En quel(s) point(s) de la carte un skieur, perdu dans un épais brouillard, aura-t-il l'impression d'être sur un plateau ?

-B- Partie « calculs »

En fait la fonction de la figure a pour expression

$$f(x,y) = -\frac{x^3}{3} - xy - y^2 + x + \frac{3}{2}$$

(les valeurs des niveaux étant exprimées en centaines de mètres).

B.1 Discutez, en fonction du paramètre v, l'allure du graphe de la fonction $f_{|y=v}$ (restriction de f à la droite ouest-est de latitude v).

B.2 Précisez par le calcul votre résultat de la question A.2.

B.3 Discutez, ne fonction du paramètre u, l'allure du graphe de la fonction $f_{|x=u}$ (restriction de f à la droite sud-nord de longitude u), et précisez par le calcul vos résultats de la question A.4.

B.4 Retrouvez et précisez par le calcul votre résultat de la question A.6.

-C- Calcul d'un plan tangent

Le skieur de A.1 est en fait à l'altitude de 216,66 mètres (mais il ne le sait pas !). Cela correspond à $z = 13/6$ centaines de mètres. Étant dans les conditions de A.1, on peut alors calculer ses coordonnées $x = 1$, $y = 0$: vérifier que ces coordonnées sont cohérentes avec l'équation donnée ci-dessus pour $z = f(x,y)$.

On veut trouver l'équation du plan tangent **P** à l'endroit où est le skieur.

C.1 On veut trouver la « ligne de plus grande pente » à l'endroit où est le skieur. Quelle est sa direction ? (raisonnez dans le plan **P** en faisant un dessin).

C.2 Donnez l'équation du profil du relief de la presqu'île passant par le skieur $(1,0,13/6)$, et dirigé vers le nord.

C.3 Donnez un vecteur directeur de la ligne de plus grande pente, puis l'équation de **P**.

Exercice 2 :

2.a Si $f(x,y) = 3x^2 + 4xy - 2y^2$, trouver $\frac{\partial f}{\partial x}(2,-3)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(2,-3)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(2,-3)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(2,-3)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,-3)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(2,-3)$.

2.b Si $f(x,y) = \sin(x^2 + 2y)$, déterminer $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

2.c Si $z = f(y/x)$, montrer que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Exercice 3 : Déterminer les dimensions du parallélépipède rectangulaire de plus grand volume qui peut être inscrit dans une hémisphère de rayon a.