UNIVERSITÉ MONTPELLIER 2
SCIENCES ET TECHNIQUES

I3M
Feuille 1

GLMA602 — Géométrie
TD – Année 2011-2012

Géométrie affine

Espaces affines

Exercice 1 : Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des points de $\mathbb{R}^3$ définit par l'équation

$$x^2 + y^2 - z = 0.$$

1.a Soit $\theta\colon \mathcal{P} \times \mathcal{P} \to \mathbb{R}^2$ définit par

$$\theta\big((x, y, x^2 + y^2), (u, v, u^2 + v^2)\big) = (u - x, v - y).$$

Montrer que muni de θ, $\mathcal{P}$ est un espace affine. Quelle est sa dimension ?

1.b Déterminer l'équation cartesienne de la droite affine D_{AC} de $\mathcal{P}$ passant par les points $A = (1, 0, 1)$ et $C = (1, 1, 2)$.

1.c Soit $0 = (0, 0, 0)$, $A = (1, 0, 1)$ et $B = (0, 1, 1)$. Montrer que $(0, A, B)$ est un repère affine de $\mathcal{P}$. En déduire une équation de la droite D_{AC} dans ce repère affine.

Exercice 2 : Soit k un corps et A une matrice à m lignes et n colonnes à coefficients dans k. Soit B un vecteur colonne de k^m. Soit $\mathcal{F}$ la partie de k^n définie par :

$$\mathcal{F} = \{X \in k^n \mid AX = B\}.$$

Montrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine. Peut-on décrire sa direction ? Quelle est sa dimension ?

Exercice 3 : Soit $ABCD$ un parallélogramme. Montrer que ses diagonales se coupent en leur milieu.

Exercice 4 :

4.a A quelles conditions les deux équations :

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b \qquad \text{et} \qquad a'_1x_1 + \cdots + a'_nx_n = b'$$

décrivent-elles des hyperplans parallèles de $\mathbb{R}^n$? le même hyperplan ?

4.b A quelles conditions les deux systèmes d'équations :

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} a'_1x + b'_1y + c'_1z = d'_1 \\ a'_2x + b'_2y + c'_2z = d'_2 \end{cases}$$

définissent-ils des droites affines de $\mathbb{R}^3$? des droites affines parallèles ?

Exercice 5 : Montrer qu'une partie non vide $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine si et seulemet si, pour tout couple (a, b) de points distincts de $\mathcal{F}$, la droite (MN) est contenue dans $\mathcal{F}$

Barycentres

Exercice 6 :

6.a Décrire l'ensemble des barycentres de deux points.

6.b En déduire une démonstration du fait que les médianes d'un triangle sont concourantes en utilisant « l'associativité des barycentre ».

Exercice 7 : Étant donné un triangle (a, b, c), décrire une construction géométrique du barycentre des systèmes de points poindérés suivant :

7.a $(a, \frac{1}{4})$, $(b, \frac{1}{4})$ et $(c, \frac{1}{2})$;

7.b $(a, \frac{3}{2})$, $(b, \frac{3}{2})$ et $(c, -2)$.

Définition 1. *Soit $(e_0, e_1, \ldots e_n)$ un repère affine de l'espace affine $\mathcal{A}$. Les coordonnées barycentriques d'un point $g \in \mathcal{A}$ sont la famille de réels $(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ tel que $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$ et*

$$g = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i e_i.$$

Exercice 8 : Les coordonnées barycentriques d'un point sont-elles unique ?

Exercice 9 :

9.a Considérons un espace affine de dimension 2, noté $\mathcal{A}^2$ et soit (e_0, e_1, e_2) un repère affine. Soient (a_0, a_1, a_2), (b_0, b_1, b_2) et (c_0, c_1, c_2) les coordonnées barycentriques des points a, b et c dans le repère affine. Montrer que a, b et c sont co-linéaire (i.e. sur la même droite affine) si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0$$

9.b Considérons un espace affine de dimension 3, noté $\mathcal{A}^3$ et soit (e_0, e_1, e_2, e_3) un repère affine. Soient (a_0, a_1, a_2, a_3), (b_0, b_1, b_2, b_3), (c_0, c_1, c_2, c_3) et (d_0, d_1, d_2, d_3) les coordonnées barycentriques des points a, b, c et d dans le repère affine. Montrer que a, b, c et d sont coplanaire (i.e. sur le même plan affine) si et seulement si

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & c_0 & d_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} = 0$$

9.c (Application) Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ donnée par $f(t) = (t, t^2, t^3)$. Étant donnée quatre réels distincts t_1, t_2, t_3 et t_4, montrer que les quatres points $f(t_1)$, $f(t_2)$, $f(t_3)$ et $f(t_4)$ ne sont pas coplanaire. Forment-ils un repère affine de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 10 :

10.a Montre que pour tout couple de point a et b, dont les coordonnées barycentriques dans un repère affine du plan affine $\mathcal{A}^2$ sont (a_0, a_1, a_2) et(b_0, b_1, b_2), l'équation de la droite affine passant par a et b est donnée par

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 & x \\ a_1 & b_1 & y \\ a_2 & b_2 & z \end{vmatrix} = 0$$

où (x, y, z) sont les coordonnées barycentrique d'un point de la droite $< a, b >$.

10.b Montrer que l'équation d'une droite en coordonnées barycentrique est de la forme

$$ux + vy + wz = 0,$$

où $u \neq v$ ou $v \neq w$ ou $u \neq w$.

10.c Montrer que les deux équations

$$ux + vy + wz = 0 \quad \text{et} \quad u'x + v'y + w'z = 0,$$

représente la même droite si et seulement si il existe $\lambda \neq 0$ tel que $(u', v', w') = \lambda(u, v, w)$.

Exercice 11 : (Caratheodory) Soit $(a_i)_{i \in I}$ une famille quelconque de points dans un espace affine $\mathcal{A}$ de dimension n. Montrer que tout barycentre de cette famille est également un barycentre d'au plus $n+1$-point de cette famille, i.e., si g est un barycentre de cette famille, alors on peut trouver $i_0, i_1, \ldots, i_n \in I$ et $\lambda_0, \ldots, \lambda_n$ tel que $\sum_{k=0}^{n} \lambda_k = 1$ et

$$g = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k a_{i_k}.$$