I3M
Feuille 2

GLMA602 — Géométrie
TD – Année 2011-2012

Applications affines

Exercice 1 : Déterminer si les applications suivantes sont affines, et déterminer leur partie linéaire le cas échéant.

1.a $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, définit par $f(x,y,z) = (2x+y-2, x+y, 2+z-y-2x)$.

1.b $h\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définit par $f(z) = (2+3i)(z)+5+2i$.

1.c L'application P qui à une fonction continue sur $[0,1]$ associe sa primitive valant 2 en $1/2$.

1.d Considérons dans l'espace R^3 et un plan $\mathcal{P}$. Soit O un point qui n'est pas dans le plan $\mathcal{P}$. On définit alors la projection centrale p_O comme suit, à tous point $M \in \mathbb{R}^3$ on associe le point M' intersection de la droite (OM) avec le plan $\mathcal{P}$.

Exercice 2 : Soit f une application affine, φ sa partie linéaire.

2.a Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un sous-espace affine. S'il est non vide donner sa direction.

2.b Montrer que si 1 n'est pas valeur propre de φ, alors f possège un unique point fixe

Exercice 3 : (Projections, symétries et symétries glissées)

Rappel :*Soit $\mathcal{F}$ un sous espace affine de $E \simeq \mathbb{R}^n$, F sa direction et G un supplémentaire de F dans E. La projection linéaire de E sur F parallèlement à G est l'application p telle que $p(u+v) = u$ pour tout couple de vecteur $(u,v) \in F \times G$. La symétrie linéaire de E sur F parallèlement à G est l'application s telle que $s(u+v) = u - v$ pour tout couple de vecteur $(u,v) \in F \times G$. La symétrie linéaire de E sur F parallèlement à G*

3.a Soit M un point de E. Montrer qu'il existe un unique point $M' \in \mathcal{F}$ tel que $\overrightarrow{MM'} \in G$. On note π l'application qui à tout point M associe le point M' ainsi défini.

3.b Montrer que l'application π est affine de partie linéaire p.

3.c Montrer que les projections affines sont caractérisées par l'identité $f \circ f = f$.

3.d Pour tout point M, on note $\sigma(M)$ le point de E défini par $\sigma(M) = 2\pi(M) - M$. Montrer que tel que $\pi(M)$ est le milieu de $[M, \sigma(M)]$.

3.e Montrer que σ est une application affine de partie linéaire s.

3.f Montrer que les symétries affines sont les applications affines involutives ($f \circ f = id$).

3.g Soit u un vecteur de F. Montrer que σ et t_u commutent. On note f leur composition. Montrer que pour tout point M, le milieu de $[M, f(M)]$ appartient à $\mathcal{F}$.

Exercice 4 : (Homothéties et translations)

4.a Justifier le fait qu'une translation est affine et montrer qu'une application affine est une translation si et seulement si sa partie linéaire est l'identité.

4.b Soit Ω un point et λ un réel non nul. L'homothétie $h_{\Omega,\lambda}$ de centre Ω et de rapport λ est définie par $h_{\Omega,\lambda}(M) = (1-\lambda)\Omega + \lambda M$. Montrer que $h_{\Omega,\lambda}$ est affine

4.c Déterminer la partie linéaire de $h_{\Omega,\lambda}$.

4.d Soit $\mathscr{D}$ l'ensemble des homothéties et des translations d'un espace affine donné. Montrer que $\mathscr{D}$ est un groupe pour la composition des applications affines.

4.e Montrer qu'une application affine f bijective appartient à $\mathscr{D}$ si et seulement si, pour toute droite affine Δ, $f(\Delta)$ est une droite parallèle à Δ.

Exercice 5 : Soit $\mathscr{E}$ un espace affine, $O \in \mathscr{E}$ et f une application affine de $\mathscr{E}$ dans lui-même.

5.a Donner l'expression d'une application affine fixant O et de même partie linéaire que f ; une telle application est-elle unique ?

5.b Montrer que f s'écrit de manière unique $f = t \circ g$ où t est une translation et g une application affine fixant le point O.

5.c Montrer que si f est bijective, alors f s'écrit de manière unique $f = h \circ t$ où t est une translation et h une application affine fixant le point O.

5.d Supposons maintenant que $\overrightarrow{f}$ soit une symétrie vectorielle. Montrer que f se décompose de manière unique $f = t \circ s = s \circ t$ avec s une symétrie affine et t une translation.

Exercice 6 : (Céva)

Soit ABC un triangle non aplati, A', B' et C' des points respectifs de (BC), (AC) et (AB). Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes si et seulement si :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$$

Exercice 7 : (Ménélaüs)

Soit ABC un triangle non aplati, A', B' et C' des points respectifs de (BC), (AC) et (AB). Montrer que les points A', B' et C' sont alignés si et seulement si :

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = 1$$

Exercice 8 : Soit $ABCD$ quatre points d'un espace affine. On considère I, J, K et L les milieux respectifs de $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, D]$ et $[D, A]$. Montrer que, quand elles sont définies, les droites joignant un sommet et l'isobarycentre du triangle formé par les trois autres sommets et les droites (IK) et (JL) sont concourantes.