I3M
Feuille 3

GLMA602 — Géométrie
TD – Année 2011-2012

Convexité, géométrie euclidienne

Convexité

Exercice 1 : Déterminer si les ensembles suivant sont convexes ou non.

1.a L'ensemble des points déterminé par l'équation $20x^2 + 15y^2 + 12z^2 = 60$;

1.b L'ensemble déterminé par

$$\begin{cases} r\cos(\vartheta) \\ r\sin(\vartheta) \end{cases}$$

avec $1 \leq \vartheta \leq 3\pi$ et $0 \leq r \leq \sin(2\vartheta/3)$;

1.c L'ensemble des matrices carrées $n \times n$ définies positives.

1.d Le produit cartésien de deux ensembles convexes.

Exercice 2 : Soit un emsemble $\mathcal{C}$ tel que pour tout $A, B \in \mathcal{C}$, le milieu de A et B soit dans $\mathcal{C}$. Cet ensemble est-il convexe ?

Exercice 3 : Un ensemble $\mathcal{E}$ est dit *étoilé* en $A \in \mathcal{E}$ si pour tout point B de $\mathcal{E}$, le segment $[A, B]$ est contenu dans $\mathcal{E}$.

3.a Donner un exemple d'ensemble étoilé qui n'est pas convexe.

3.b Montrer qu'un ensemble convexe est étoilé en tout ses points. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 4 : Soit $\mathcal{C}$ un sous-ensemble convexe d'un espace-affine $\mathcal{A}$. Une fonction $f\colon \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ est dite *convexe* si et seulement si pour tout $t \in [0, 1]$ et $A, B \in \mathcal{C}$,

$$f(tA + (1-t)B) \leq tf(A) + (1-t)f(B). \tag{1}$$

Si de plus l'inégalité (1) est stricte, on dira que la fonction est *strictement convexe*.

4.a Montrer qu'un minimum local d'une fonction convexe est un minimum global. En déduire qu'une telle fonction admet au plus une valeur minimal.

4.b (Principe du maximum) Supposons que $\mathcal{C}$ soit d'intérieure non vide. Montrer que si f est convexe et atteint son maximum à l'intérieure, alors f est constante. Que peux-t-on dire si f est strictement convexe ?

4.c Montrer qu'une fonction strictement convexe admet au plus un unique minimum. Donner un exemple d'une telle fonction qui n'admet ni de minimum, ni de maximum.

Géométrie euclidienne

Exercice 5 : Soient A et B deux points d'un espace affine euclidien $\mathcal{E}$, montrer que le point I isobarycentre du segment $[A, B]$ est l'unique point de la droite (AB) tel que $AI = BI$.

Exercice 6 : (Inégalité de Ptolémée) Soient A, B, C et D quatres point d'un espace affine euclidien. Montrer que l'inégalité suivante est toujours verifiée :

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot AD.$$

Dans quel cas as-t-on égalité ?

Exercice 7 : (Puissance d'un point par rapport à une sphère). Soit $\mathcal{C}$ la sphère centrée en O de rayon R d'un espace euclidien.

7.a Soit M un point extérieure à la sphère et D une droite qui rencontre la sphère au point A, B (éventuellement confondus si la droite est tangente). Montrer que quel que soit la droite D,

$$AM \cdot BM = OM^2 - R^2$$

7.b Ce résultat est-il encore valable à l'intérieur de la sphère ?

Exercice 8 : (Projection sur un convexe) Soit $\mathcal{C}$ un ensemble convexe et fermée de $\mathbb{R}^n$ muni d'une distance euclidienne d, et soit A un point de $\mathbb{R}^n$.

8.a Montrer qu'il existe un point $x \in \mathcal{C}$ tel que $d(A, x)$ soit minimal.

8.b Montrer que le point x est unique.