Sage

Introduction

Ce TP est une initiation au logiciel Sage. Pour utiliser ce logiciel deux possibilités

1. Suivez ce lien http ://www.sagenb.org et utilisez-le en ligne. En vous-y inscrivant vous aurez accès aux feuilles préparées et publiées.
2. Ouvrez un terminal et tapez

```
sage-4.8
```

Aujourd'hui nous utiliserons la seconde méthode. Une fois la commande tapée et validée, patientez me temps qu'apparaisse le prompteur suivant :

```
sage:
```

Pour rediger votre compte-rendu, vous utiliserez Libre-office (open-office). Vous y inclurez vos dessins et vos réponses et enverrez le fichier à votre chargé de TP. Créez un dossier sage où vous sauvergarderez vos fichier

N'OUBLIEZ PAS DE SAUVEGARDER À INTERVALLE RÉGULIER.

Le tutoriel

Vous trouverez un tutoriel en français en suivant ce lien : http ://www.sagemath.org/fr/html/tutorial/.

Pour répondre aux questions qui suivent, utilisez Sage et naviguez dans le tutoriel pour trouvez comment faire. En particulier notez l'information suivante, tiré du tutoriel :

> Sage dispose de fonctions très souples de sauvegarde et relecture de sessions entières.
>
> La commande `save_session(name='nom_de_session')` enregistre toutes les variables définies dans la session courante sous forme de dictionnaire dans le fichier `nom_de_session.sobj`. (Les éventuelles variables qui ne supportent pas la sauvegarde sont ignorées.) Le fichier .sobj obtenu peut être rechargé comme n'importe quel objet sauvegardé ; on obtient en le rechargeant un dictionnaire dont les clés sont les noms de variables et les valeurs les objets correspondants.
>
> La commande `reload_session(name='nom_de_session')` charge toutes les variables sauvées dans `nom_de_session`. Cela n'efface pas les variables déjà définies dans la session courante : les deux sessions sont fusionnées.

On trouve également les notes suivantes de Casamayou et. al.

1 Analyse

mots clés : `plot, show, line, factor, bool, limit`

Exercice 1 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x - 4}{x - 2}$.

1.a Affecté à la variable `f` une expression symbolique paramétrée par `x` :

```
x= var('x'); f(x)=(x^2-3*x-4)/(x-2)
```

1.b Tracez le graphe de f sur l'intervalle $[-10; 10]$ en n'affichant que les points dont l'ordonnée appartient à $[-20; 20]$.

1.c Quelles sont les limites de $f(x)$ en $+\infty$, $-\infty$, 2 par valeurs supérieures, et 2 par valeurs inférieures ?

1.d Quelle est la limite du rapport $f(x)/x$ quand $x \to +\infty$?

1.e Quelle est la limite de $f(x) - x$ quand $x \to +\infty$?

(i) Affectez à la variable `p1` le graphe de f sur l'intervalle $[-10; 10]$.

(ii) Affectez à la variable `p2` le graphe de l'asymptote oblique d'équation $y = x - 1$ sur l'intervalle [-10 ; 10]

(iii) Consultez la documenation sur la fonction `line`, et affectez à `p3` le segment de droite reliant les points de coordonnées $(2; -20)$ et $(2; 20)$.

(iv) Affichez ces 3 graphes sur une même figure à l'aide de la commande

```
(p1+p2+p3).show(ymin=-20,ymax=20)
```

(v) Calculez $f'(x)$.

(vi) Retrouvez ce résultat en calculant $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Pour vous convaincre de l'égalité de l'expression obtenue avec l'expression de $f'(x)$ obtenue à la question précédente vous pourrez utilisez la méthode `simplify_rational` qui transforme une somme de fractions en une unique fraction par réduction au même dénominateur, ou encore utiliser la fonction `bool`.

(vii) Explicitez la dérivée seconde de f et étudiez la concavité du graphe de f. Après avoir obtenu l'expression de $f''(x)$ sous forme de fraction rationnelle vous factoriserez le numérateur et le dénominateur de cette fraction en lui appliquant la méthode `factor`.

Exercice 2 : Tracer le graphe de $P(x) = x^3 - 8x^2 + 13x - 6$ sur l'intervalle $[-1; 3]$.

2.a Que semble mettre en évidence ce graphe ?

2.b Calculer `P1 = diff(P,x)` et le pgcd de P et P_1.

Sachez que Sage vous permet également de faire des developpement limité ou asymptique par l'intermediaire de la méthode `taylor`.

Exercice 3 : En utilisant la commande `integrate`, calculer les primitives de

$$\ln(x^2+2) \qquad x\sqrt{1+x} \qquad \frac{\sqrt{x^2+x}}{x^4} \qquad \frac{x+1}{\sqrt{x^2-3x+2}}$$

$$\frac{\tan x}{1+\tan x} \qquad \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}} \qquad x+\sqrt{x^2+a^2}$$

Exercice 4 : Soit $f(x) = \dfrac{x^2 + ax^2 + bx + x}{(x-1)^2(x^2+1)^2}$

4.a Avec la commande `f.partial_fraction(x)`, décomposez la fraction rationnelle $f(x)$ en éléments simples.

4.b Calculer une primitive de f.

4.c En utilisant la fonction `solve`, déterminer a,b,c pour que les primitives de f soient des fractions rationnelles.

Exercice 5 : À l'aide de `numerical_integral` calculer des valeurs approchées de

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{\log(x)}{1+x}dx \text{ et } B = \int_0^1 \frac{\mathrm{atan}(x)}{x}dx.$$

2 Algèbre linéaire

Exercice 6 : Résoudre le système suivant

$$\begin{cases} 3x + 2y + 4z - 3t = -6 \\ x + y + z + t = 0 \\ x - y + z - t = 4 \\ x - 5y - t = -8 \end{cases}$$

Exercice 7 : Considérons l'application linéaire f de matrice dans la base (e_1, e_2, e_3, e_4) donnée par $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 9 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ déterminer sa matrice dans la base $\begin{cases} v_1 = e_1 + e_2 \\ v_2 = e_2 + e_3 \\ v_3 = e_3 + e_4 \\ v_4 = e_4 + e_1 \end{cases}$

Exercice 8 : Mots clés : `det()`, `transpose()`, `inverse()`, `trace()`.

Définir dans sage les matrices suivantes

$$B = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \qquad V = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 & a^4 \\ 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\ 1 & c & c^2 & c^3 & c^4 \\ 1 & d & d^2 & d^3 & d^4 \\ 1 & e & e^2 & e^3 & e^4 \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ a & 2 & c \\ b & c & 3 \end{pmatrix} \qquad T = \begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix}$$

8.a Montrer que $B^tB = {}^tBB = I_2$, i.e. que la matrice B est orthogonale.

8.b Calculer le rang de la matrice de Vandermonde V, ainsi que son determinant sous une forme factorisée. Calculer l'inverse de V.

8.c Les matrice S et T sont-elles inversible ? Si oui, calculer leur inverse.

Exercice 9 : Mots clés : `right_kernel()`

Donnez-vous trois matrices carrées nxn (non triviales) avec $n = 3, 4, 5$ et déterminer leur noyau à l'aide de Sage.

3 Autres

3.a Théorie des nombres

Exercice 10 : Soit N le nombre obtenu en multipliant le numéro du jours de votre naissance et votre année de naissance puis en soustrayant 2012.

10.a Déterminez la décomposition en éléments premier de N.

10.b Déterminez le nombre premier qui précède N puis celui qui le suit.

10.c Déterminez le reste de N^{12} modulo 25.

3.b Nombres complexes

Dans sage `i` et `I` représente un nombre dont le carré vaut 1. (vérifiez le !)