Valeurs propres-Vecteurs propres

Le but du calcul des valeurs propres et des vecteurs propres d'une matrice, est la diagonalisation ou à défaut la trigonalisation. Cela consiste, une matrice A étant donnée à déterminer deux autres matrices P et B telles que

$$P^{-1}AP = B \tag{1}$$

où B est de la forme

$$\begin{cases} B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} & \text{On parlera alors de diagonalisation} \\ B = \begin{pmatrix} \lambda & b \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} & \text{On parlera alors de trigonalisation} \end{cases}$$

1 Détermination des valeurs propres

On se donne donc une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ et on cherche les valeurs λ telles que le système suivant

$$\begin{cases} (a-\lambda)x + by = 0 \\ cx + (d-\lambda)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \tag{2}$$

n'admette pas que le vecteur $\begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ comme solution. Comme celui-ci est toujours solution, cela revient à se demander quand le système admet une infinité de solution, c'est-à-dire à regarder les cas où le déterminant du système est nul. On est donc ramené à résoudre l'équation

$$\begin{aligned} (a-\lambda)(d-\lambda) - bc &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) &= 0 \\ \Leftrightarrow \lambda^2 - \text{Trace}(A)\lambda + \text{dét}(A) &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

Trois cas peuvent se présenter suivant le type de solutions de l'équation :

$$\begin{cases} (a+d)^2 - 4(ad-bc) > 0 & \text{l'équation admet deux solutions réelles} \\ & \text{alors la matrice admet deux valeurs propres réelles} \\ (a+d)^2 - 4(ad-bc) = 0 & \text{l'équation admet une seule solution (dite double) réelle} \\ & \text{alors la matrice admet une seule valeur propre réelle} \\ (a+d)^2 - 4(ad-bc) < 0 & \text{l'équation admet deux solutions complexes conjugués} \\ & \text{alors la matrice admet deux valeurs propres complexes} \end{cases}$$

2 Détermination des vecteur propres

2.a Cas de deux valeurs propres réelles

(en exemple voir l'exercice 2 de la feuille «Matrices 2×2 II»)

Soit donc λ_1 et λ_2 les deux valeurs propres, si on ne s'est pas trompé, en injectant ces valeurs propres dans le système (2) on obtient deux fois la même équation à un coefficient multiplicatif près. Du coup on a plusieurs possibilités, par exemple on pourra prendre pour λ_1 le vecteur propre :

$$\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix} -b/(a-\lambda_1) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(d-\lambda_1)/c \\ 1 \end{pmatrix}$$

et pour λ_2 le vecteur propre:

$$\overrightarrow{V_2} = \begin{pmatrix} -b/(a-\lambda_2) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(d-\lambda_2)/c \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il ne reste plus qu'à déterminer P et B et bien on peut simplement prendre

$$P = \begin{pmatrix} -b/(a-\lambda_1) & -b/(a-\lambda_2) \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

il ne reste plus qu'à vérifier que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

2.b Cas d'une seule valeur propre

(en exemple voir l'exercice 3 de la feuille «Matrices 2×2 II»)

Soit λ_0 cette unique valeur propre. Et bien il suffit de choisir un vecteur $\overrightarrow{V_2} = (x_2, y_2)$ tel que le vecteur

$$\overrightarrow{V_1} = \begin{pmatrix} (a-\lambda_0)x_2 + by_2 \\ cx_2 + (d-\lambda_0)y_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(Attention au fait que $\overrightarrow{V_2}$ n'est pas un vecteur propre mais que $\overrightarrow{V_1}$ en est un) alors on prend pour matrice de passage la matrice

$$P = \begin{pmatrix} (a-\lambda_0)x_2 + by_2 & x_2 \\ cx_2 + (d-\lambda_0)y_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

il ne reste plus qu'à vérifier que

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

2.c Cas de deux valeurs propres complexes

(en exemple voir l'exercice 3 de la feuille «Matrices 2×2 II»)

On fait la même chose que pour les deux valeurs propres réelles.

Suites récurrentes

On ne fait pas la théorie (voir poly. du cour), mais sachez que la «recette» qui suit provient de l'étude des valeurs propres et des vecteurs propres des matrices 2×2

1 Système de deux suites

On considère les familles de suites données par

$$\begin{cases} u_{n+1} = au_n + bv_n \\ v_{n+1} = cu_n + dv_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

et u_0, v_0 étant donnés. On commence par déterminer les valeurs propres de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; deux cas se présentent

1.a Deux valeurs propres (réelles ou complexes)

alors en notant λ_1 et λ_2 les valeurs propres, les suites sont de la forme

$$\begin{cases} u_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n \\ v_n = \gamma\lambda_1^n + \delta\lambda_2^n \end{cases} \tag{2}$$

il ne nous reste donc plus qu'a déterminer α, β, γ et δ. Pour cela on calcule u_1 et v_1 grâce à la relation de récurrence (1) et on résout les deux systèmes de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} \alpha + \beta = u_0 \\ \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 = u_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \gamma + \delta = v_0 \\ \gamma\lambda_1 + \delta\lambda_2 = v_1 \end{cases}$$

1.b Une seule valeur propre réelle

alors en la notant λ les suites sont de la forme

$$\begin{cases} u_n = \lambda^n(\alpha + \beta n) \\ v_n = \lambda^n(\gamma + \delta n) \end{cases} \tag{3}$$

il ne nous reste donc plus qu'a déterminer α, β, γ et δ. Pour cela on calcule u_1 et v_1 grâce à la relation de récurrence (1) et on résout les deux systèmes de deux équations à deux inconnues

$$\begin{cases} \alpha = u_0 \\ \alpha\lambda + \beta\lambda = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = u_0 \\ \beta = u_1/\lambda - u_0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \gamma = v_0 \\ \gamma\lambda + \delta\lambda = v_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = v_0 \\ \delta = v_1/\lambda - v_0 \end{cases}$$

2 Cas des systèmes récurrents du second ordre

Il s'agit des suites de la forme $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$, avec u_0 et u_1 donnés.
Cette foix-ci on recherche les solution de

$$\lambda^2 - a\lambda + b = 0$$

là encore deux cas : deux solutions distinctes (réelles ou complexes) λ_1 et λ_2 alors la suite est de la forme $u_n = \alpha\lambda_1^n + \beta\lambda_2^n$, et on détermine α et β en résolvant le système suivant

$$\begin{cases} \alpha + \beta = u_0 \\ \alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2 = u_1 \end{cases}$$

ou alors une seule solution réelle λ, alors les solutions sont de la forme $u_n = \lambda^n(\alpha + \beta n)$ et on détermine α et β en résolvant le système suivant

$$\begin{cases} \alpha = u_0 \\ \alpha\lambda + \beta\lambda = u_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = u_0 \\ \beta = u_1/\lambda - u_0 \end{cases}$$